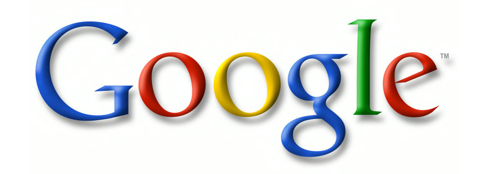
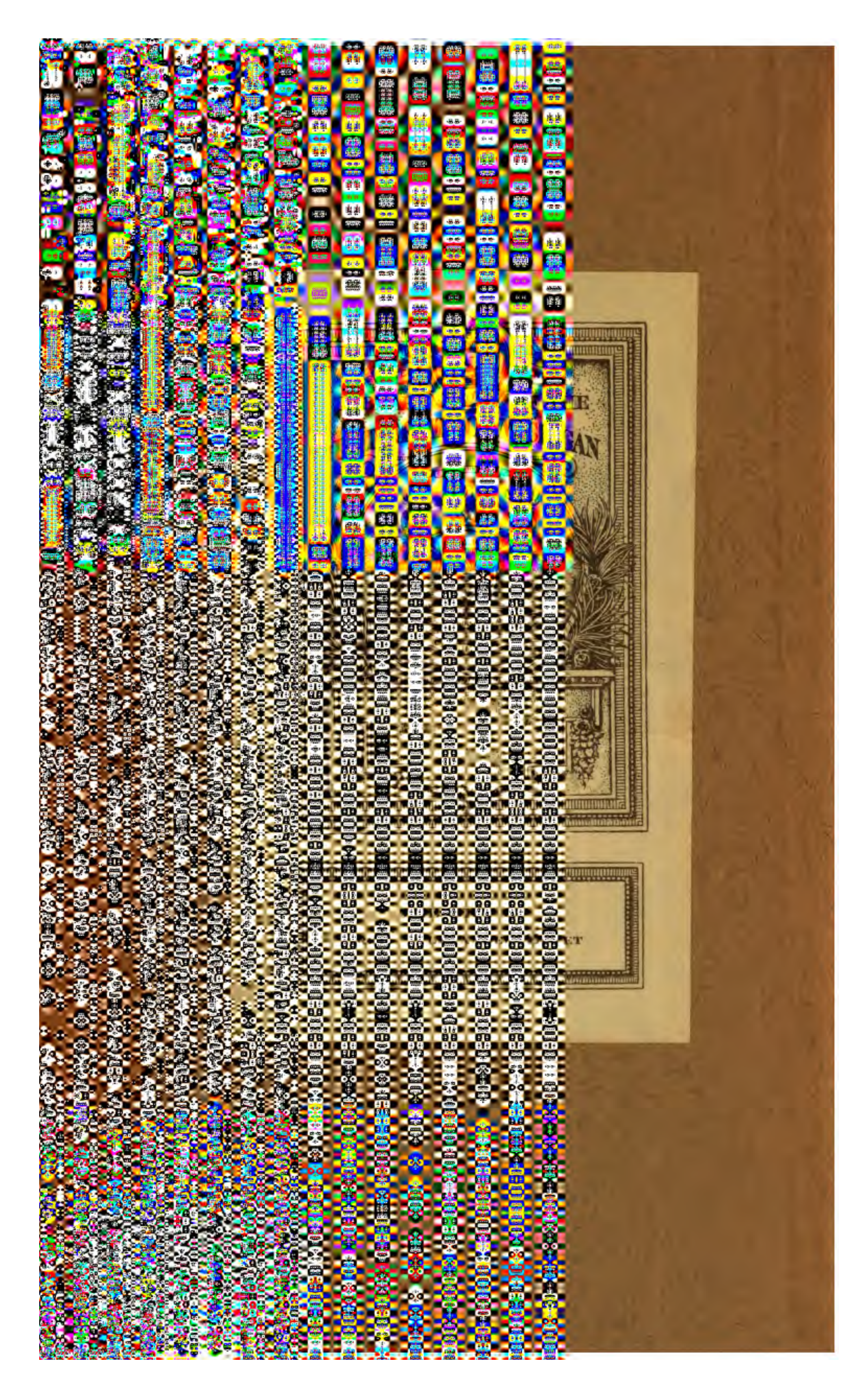
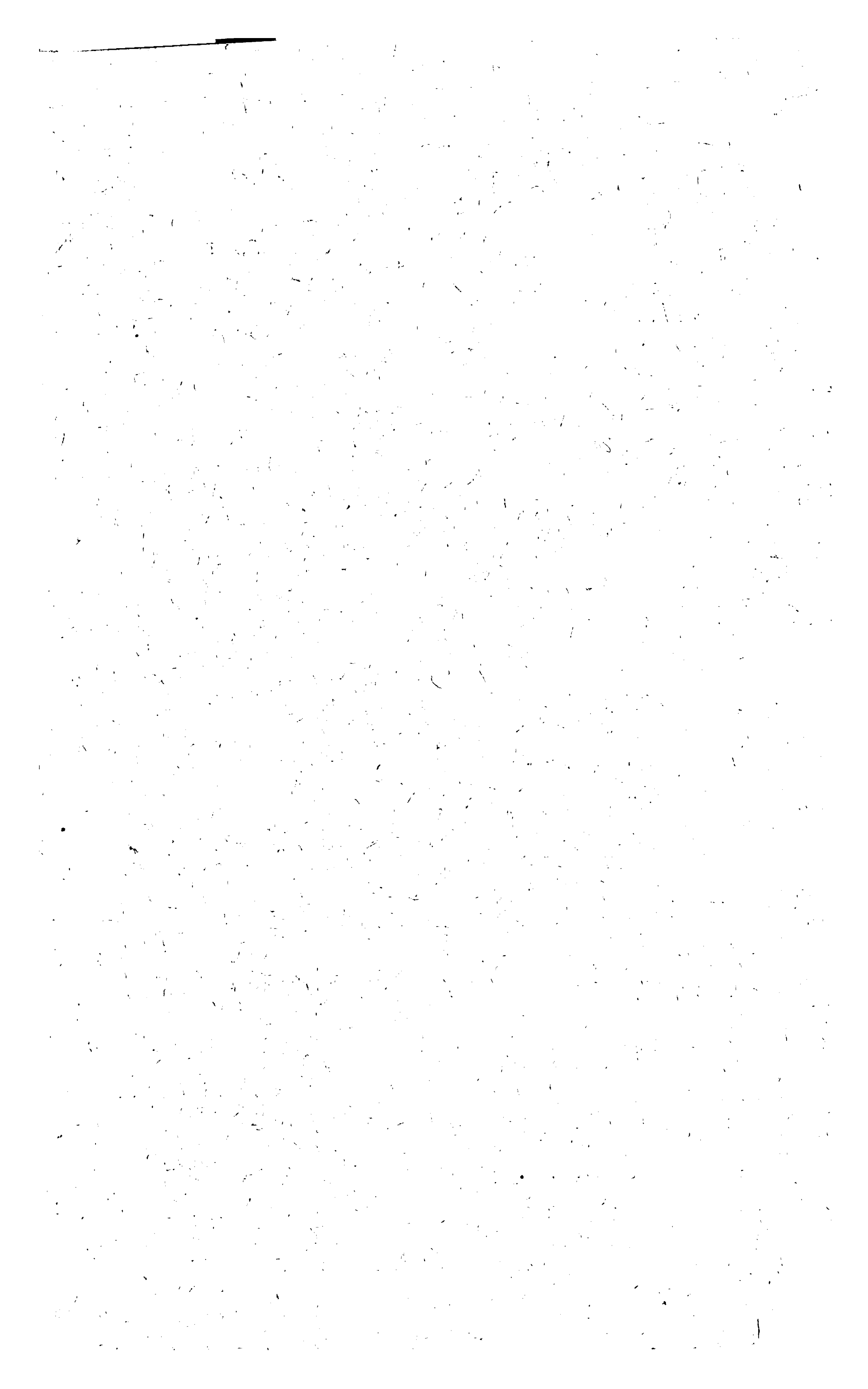








ELEMENTE

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

IN

HOMOGENEN COORDINATEN.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

ELEMENTE

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

IN

HOMOGENEN COORDINATEN.

VON

DR. RICHARD HEGER,

OBERLEHRER AM KREUZGYMNASIUM ZU DRESDEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1872.

VORWORT.

Die Vortheile, welche die Benutzung homogener Coordinaten zur Ableitung solcher Sätze darbietet, die sich auf allgemeine Lagenverhältnisse beziehen, sind allseitig anerkannt. Die Entwicklungen in homogenen Coordinaten gewinnen — es darf das ohne Paradoxie gesagt werden — eine geometrische Anschaulichkeit, die der Anschaulichkeit der durch sie repräsentirten Gebilde nahe kommt, so dass der Vortheil der ununterbrochenen Beziehung auf die geometrischen Gestalten für die analytische Geometrie der homogenen Coordinaten in hohem Grade in Anspruch genommen werden darf, — und sich hier mit allen Vorzügen vereint, die in der Anwendung analytischer Schlüsse liegen.

Es schien mir eine nicht nutzlose Arbeit, die Fundamentalformeln der Geometrie in homogenen Coordinaten, sowie diejenigen Sätze aus der Theorie der Gebilde zweiter Ordnung und der collinearen Verwandtschaft, welche sich für diese Coordinaten eignen, möglichst systematisch, bündig und deutlich zu entwickeln. Ich habe dabei die Bedürfnisse der Anfänger wesentlich im Auge gehabt und hoffe, ihnen diese so fruchtbare Methoden durch meine Schrift leicht zugänglich zu machen.

Insbesondere hoffe ich, der grossen Mehrzahl von Studirenden an Universitäten und polytechnischen Hochschulen, die im analytisch-mathematischen Denken weit mehr geübt sind als im synthetisch-geometrischen, dadurch einen Dienst zu erweisen, dass hier die grundlegenden Sätze, auf welchen die synthetische Geometrie aufgebaut ist, streng und kurz analytisch entwickelt vorliegen, so dass das Studium synthetisch-geometrischer Werke mit Leichtigkeit angeschlossen werden kann.

Die Einführung modificirter Plancoordinaten wird sich, wie ich glauben darf, durch ihre analytischen Vortheile rechtfertigen, auf die ich auch gelegentlich noch besonders hinzuweisen mir erlaubt habe.

Dresden, am 15. Februar 1872.

Richard Heger.

INHALT.

Analytische Geometrie der Ebene.

Analytische Geometrie des Raumes.

Collineation von Punktgeraden, Strahlenbüscheln und Ebenenbüscheln.

Collineation von Ebenen und Ebenenbündeln.

Collineation von Räumen.

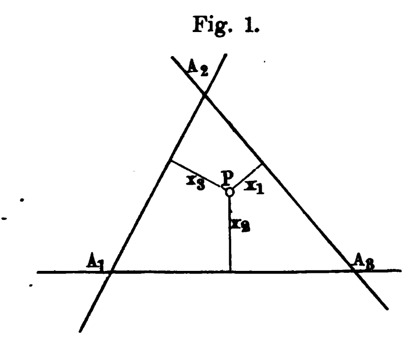
Analytische Geometrie der Ebene.

§. 1.

Homogene Coordinaten des Punktes und der Geraden in der Ebene.

1. Unter den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes P versteht man die senkrechten Abstände dieses Punktes von den drei Seiten g_1, g_2, g_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 1). Dieses Dreieck heisst das Coordinatendreieck oder Axendreieck; die Geraden, auf denen seine drei Seiten liegen, heissen die Coordinatenaxen des ebenen homogenen Coordinatensystems.

Fig. 1.



Die Coordinate x_k ($k = 1$ oder 2 oder 3) wird positiv gerechnet, wenn P mit A_k auf derselben Seite von g_k liegt; im Gegenfalle negativ.

2. Bezeichnet Δ die doppelte Fläche des Coordinatendreiecks, so werden für jede Lage von P die Coordinaten des Punktes durch die Gleichung verbunden:

1) $$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta.$$

Das Trinom links werde künftig kurz mit D bezeichnet, die Gleichung also mit

$$D = \Delta$$

abgekürzt.

3. **Uebergang von einem Descartes'schen orthogonalen System zu einem homogenen.**

Unbeschadet der Allgemeinheit wird der Ursprung des orthogonalen Systems im Innern des Axendreiecks des homogenen Systems angenommen.

Im orthogonalen Systeme habe g_k die Gleichung

$$a_k x + b_k y - 1 = 0.$$

Der Ursprung des orthogonalen Systems hat von dieser Geraden den Abstand

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}},$$

wobei die Wurzel immer positiv gerechnet werden mag.

Legt man durch den Punkt P mit den Coordinaten $x\,y$ eine Parallele zu g_k, so hat der Ursprung von dieser Parallelen den Abstand

$$e_k' = \frac{a_k x + b_k y}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Die Wurzel werde auch hier positiv gerechnet. Dann wird

$$e_k' \gtrless 0,$$

je nachdem die durch den Ursprung zu g_k gezogene Parallele P von g_k trennt oder nicht.

Hieraus folgt, dass für jede Lage von P

$$x_k = e_k - e_k' = \frac{1 - a_k x - b_k y}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Hieraus folgen die Transformationsformeln:

$$2)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1 - a_1 x - b_1 y}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{1 - a_2 x - b_2 y}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\[2ex] x_3 = \dfrac{1 - a_3 x - b_3 y}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}. \end{cases}$$

Dividirt man die rechten Seiten von 2) Glied für Glied durch die Wurzeln und löst die drei linearen Gleichungen nach 1, x und y auf, so erhält man aus der Lösung für 1 nach gehöriger Reduction die Gleichung 1); die Lösungen nach x und y geben diese Coordinaten als **homogene lineare Functionen der homogenen Coordinaten.**

Die Transformation aus orthogonalen in homogene Systeme geschieht demnach durch lineare, die reciproke Transformation durch homogene lineare Substitutionen.

4. Um von einem homogenen System in ein anderes überzugehen, denke man sich beide auf dasselbe orthogonale System bezogen. Man setze zunächst voraus, dass beide Axendreiecke ein Flächenstück gemein haben und lege den Ursprung des orthogonalen Systems in dieses Flächenstück. Dann stelle man die Formeln 2) für beide Systeme auf und löse die zweimal drei Gleichungen nach $1, x, y$. Indem man nun diese Lösungen paarweise einander gleichsetzt, erhält man drei Gleichungen, auf deren linken Seiten homogene lineare Functionen der Coordinaten des einen Systems, auf deren rechten homogene lineare Functionen des andern Systems stehen. Hieraus folgt:

Die Transformation aus einem homogenen System in ein anderes homogenes geschieht durch homogene lineare Substitutionen.

Dass die obige Einschränkung auf diesen Satz einflusslos ist, erkennt man leicht. Denn wenn die beiden Axendreiecke sich ausschliessen, so construire man ein Dreieck, welches keines der beiden ausschliesst, und transformire aus dem ursprünglichen Dreieck in dies Hilfsdreieck und dann aus dem Hilfsdreieck in das neue Dreieck.

5. Sind h_1, h_2, h_3 die von den gleichbezifferten Ecken auf die gleichbezifferten Gegenseiten des Axendreiecks gefällten Höhen, so sind die Coordinaten der Eckpunkte

für

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ A_1: & h_1 & 0 & 0 \\ A_2: & 0 & h_2 & 0 \\ A_3: & 0 & 0 & h_3. \end{array}$$

Sei ϱ der Radius des vom Dreieck umschlossenen eingeschriebenen Kreises, O sein Centrum, S der Schwerpunkt des Dreiecks, so sind die Coordinaten

für

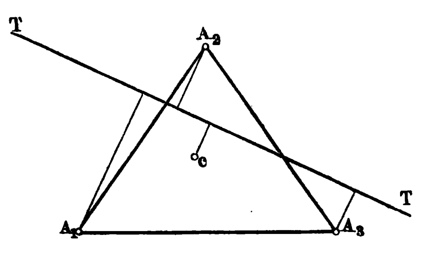
$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ O: & \varrho & \varrho & \varrho \\ S: & {}^1/_3\, h_1 & {}^1/_3\, h_2 & {}^1/_3\, h_3. \end{array}$$

6. Das Dreipunktsystem. Unter den homogenen Coordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden T versteht man die Quotienten aus den Abständen derselben von den Ecken A_1, A_2, A_3 des Coordinatendreiecks und dem Abstande von dem willkürlich in der Ebene

angenommenen Fixpunkte C. Man giebt u_k das positive Vorzeichen, wenn A_k und C auf derselben Seite von T liegen; im Gegenfalle das negative. Die drei Punkte A_1, A_2, A_3 heissen Hauptpunkte des Systems (Fig. 2).

7. Zum Uebergange aus einem orthogonalen Systeme in ein homogenes seien die orthogonalen Coordinaten der Hauptpunkte gegeben, und zwar $\alpha_k\, \beta_k$ für A_k; die orthogonalen Coordinaten der Geraden T, d. i. die reciproken Axenabschnitte derselben seien u und v. Die Coordinaten von C in Bezug auf A_1, A_2, A_3 seien r_1, r_2, r_3. Setzt man nun, was unbeschadet der Allgemeinheit geschieht, den Fixpunkt C als Ursprung des orthogonalen Systems voraus, so liefert die Entwickelung in 3):

Fig. 2.



$$
3)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= 1 - \alpha_1 u - \beta_1 v, \\
u_2 &= 1 - \alpha_2 u - \beta_2 v, \\
u_3 &= 1 - \alpha_3 u - \beta_3 v.
\end{aligned}
$$

8. Löst man diese Gleichungen nach 1 auf, so erhält man:

$$
\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ u_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ u_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.
$$

Diese Gleichung liefert:

$$
4)\qquad g_1 r_1 \cdot u_1 + g_2 r_2 \cdot u_2 + g_3 r_3 \cdot u_3 = \Delta.
$$

Diese Gleichung erfüllen die drei homogenen Coordinaten jeder Geraden; das Trinom links werde durch $\mathfrak{U}$ bezeichnet, die Gleichung 4) also durch

$$
\mathfrak{U} = \Delta
$$

abgekürzt.

9. Alle Geraden, welche eine Coordinate gemein haben, für welche also z. B. u_k ein und denselben gegebenen Werth hat, umhüllen einen Punkt P. Derselbe liegt auf $A_k C$ und theilt die Strecke $A_k C$ im Verhältniss

$$
A_k P : P C = - u_k.
$$

Wählt man nun drei Zahlen u_1', u_2', u_3', welche 4) erfüllen, und construirt die Gerade, welche $A_1 C$ im Verhältniss $(-u_1')$, $A_2 C$ im Verhältniss $(-u_2')$ theilt, so sind u_1' und u_2' die auf A_1 und A_2 bezüglichen Coordinaten der Geraden, und die dritte Coordinate derselben kann von u_3' nicht verschieden sein. Hieraus folgt: Durch drei Zahlen u_1, u_2, u_3, welche die Gleichung 4) erfüllen, ist stets eine Gerade eindeutig bestimmt, welche diese Zahlen zu Coordinaten hat *).

10. Die Transformation aus einem orthogonalen Systeme in ein homogenes, oder aus einem homogenen Systeme in ein anderes erfolgt durch homogene lineare Substitutionen.

11. Die Coordinaten der Seiten des Axendreiecks sind

für

$$\begin{array}{lcccc} & & u_1 & u_2 & u_3 \\ A_2 A_3 & : & \frac{h_1}{r_1} & 0 & 0 \\ A_3 A_1 & : & 0 & \frac{h_2}{r_2} & 0 \\ A_1 A_2 & : & 0 & 0 & \frac{h_3}{r_3}. \end{array}$$

Jede durch den Fixpunkt C gehende Gerade hat zu Coordinaten:

$$u_1 = \pm \infty, \quad u_2 = \pm \infty, \quad u_3 = \pm \infty.$$

§. 2.

Gleichung der Geraden und des Punktes in homogenen Coordinaten des Punktes und der Geraden.

1. Gleichung der Geraden in homogenen Punktcoordinaten.

Die Gleichung einer Geraden T im orthogonalen Systeme sei:

$$(T \equiv)\ ax + by - 1 = 0.$$

Unter Benutzung der früheren Bezeichnungen hat man für die Punkte von T die vier Gleichungen:

---

*) Den Umstand, dass dies von den Plücker'schen Geradencoordinaten in Rücksicht auf ihre Bedingungsgleichung nicht gilt, darf ich zu Gunsten der von mir vorgeschlagenen Coordinaten auslegen.

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\, x_1 + a_1 x + b_1 y - 1 = 0,$$
$$\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\, x_2 + a_2 x + b_2 y - 1 = 0,$$
$$\sqrt{a_3^2 + b_3^2}\, x_3 + a_3 x + b_3 y - 1 = 0,$$
$$a x + b y - 1 = 0.$$

Hieraus folgt für x_1, x_2, x_3:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \,.\, x_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \,.\, x_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \,.\, x_3 & a_3 & b_3 & 1 \\ 0 & a & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i.: die Gleichung der Geraden in homogenen Punktcoordinaten lässt sich in die Form bringen:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

worin a_1, a_2, a_3 drei die Gerade charakterisirende Constanten sind.

Ebenso leicht folgt: Alle Punkte, deren Coordinaten der mit drei willkürlichen Constanten gebildeten homogenen linearen Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

genügen, liegen auf einer durch diese Constanten eindeutig bestimmten Geraden.

2. Die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte P' und P'' mit den Coordinaten x_k' und x_k'' geht, hat zur Gleichung:

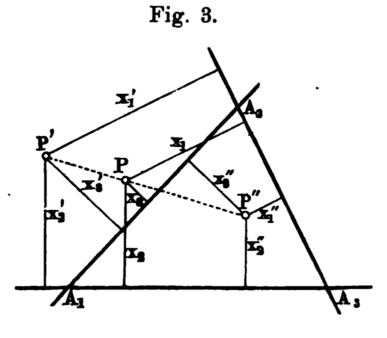
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

3. Lehrsatz. Jeder Punkt P, dessen Coordinaten x_k aus denen zweier gegebenen Punkte P' und P'' mit den Coordinaten x_k' und x_k'' abgeleitet werden nach

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'',$$
$$\lambda' + \lambda'' = 1,$$

liegt auf der Geraden $P'P''$ (Fig. 3).

Fig. 3.



Beweis. Die so berechneten drei Werthe x_1, x_2, x_3 sind in der That die Coordinaten eines Punktes, denn sie erfüllen die Gleichung $D = \Delta$.

Setzt man sie in die Gleichung der Geraden $P'P''$ ein, so erhält man links:

$$\begin{vmatrix} \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'' & \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'' & \lambda' x_3' + \lambda'' x_3'' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet identisch.

4. Transformirt man die Coordinaten von P, P', P'' in ein neues System und sind hier die Coordinaten ξ_k, ξ_k', ξ_k'', so haben die Transformationsformeln folgende allgemeine Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi_k' &= A_k x_1' + B_k x_2' + C_k x_3', \\ \xi_k'' &= A_k x_1'' + B_k x_2'' + C_k x_3'', \\ \xi_k &= A_k x_1 + B_k x_2 + C_k x_3. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\xi_k = \lambda' \xi_k' + \lambda'' \xi_k''.$$

Hiernach haben die Coefficienten λ' und λ'' eine vom Coordinatensystem unabhängige, nur von der gegenseitigen Lage der drei Punkte abhängige Bedeutung.

Um dieselbe zu ermitteln, nehmen wir ein hierfür möglichst geeignetes Coordinatensystem, in welchem P' auf A_1, P'' auf A_2 liegt. Die Coordinaten der drei Punkte sind hier

für	x_1	x_2	x_3
P'	h_1	0	0
P''	0	h_2	0
P'''	$\lambda' h_1$	$\lambda'' h_2$	$0.$

Es verhält sich nun

$$P''P : P''P' : PP' = \lambda' : 1 : \lambda'',$$

wenn die Strecken AB mit gleichen Vorzeichen behaftet werden, welche vom Punkte A zum Punkte B in gleicher Richtung durchlaufen werden.

Hiernach ist P derjenige Punkt, welcher die Strecke $P'P''$ im Verhältniss

$$P''P : PP' = \lambda' : \lambda''$$

theilt, wobei ein positives Verhältniss dem innern, ein negatives dem äussern Theilpunkte zugehört.

Hieraus folgt: Die Coordinaten eines jeden Punktes der Geraden $P'P''$ können unter der Form

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k''$$

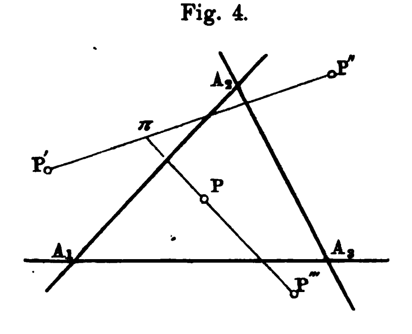
dargestellt werden.

5. **Lehrsatz.** Die Coordinaten jedes Punktes der Ebene können unter der Form

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k + \lambda''' x'''_k, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1$$

dargestellt werden, wenn x'_k, x''_k, x'''_k die Coordinaten dreier nicht in derselben Geraden gelegenen Punkte sind (Fig. 4).

Fig. 4.



Beweis. Man verbinde P''' mit P und schneide durch $P'' P'$. Der Schnittpunkt Π habe die Coordinaten ξ_k. Man kann nun die vier Coefficienten

$$\lambda''', \mu, \lambda'', \lambda'$$

immer so wählen, dass zugleich

a) $$\mu : \lambda''' = P'''P : P\Pi, \quad \mu'' + \lambda''' = 1,$$

b) $$\lambda'' : \lambda' = P'\Pi : \Pi P'', \quad \lambda'' + \lambda' = \mu''.$$

Alsdann ist nach den vorigen Nummern:

$$x_k = \lambda''' x'''_k + \mu \xi_k,$$

$$\xi_k = \frac{\lambda''}{\mu} x''_k + \frac{\lambda'}{\mu} x'_k,$$

woraus folgt:

$$x_k = \lambda''' x'''_k + \lambda'' x''_k + \lambda' x'_k,$$

wie zu beweisen war.

Die Bestimmung der λ ist eindeutig, es wird also unter dieser Form jeder Punkt, und zwar nur auf eine Weise dargestellt.

Man sieht leicht, dass P der Mittelpunkt paralleler Kräfte von der Grösse $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ mit den Angriffspunkten $A_1 A_2 A_3$ ist.

6. Die Coordinaten der Spuren der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

auf den drei Coordinatenaxen ergeben sich aus den Gleichungspaaren:

für die Spur auf g_1: $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$
$g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta;$

für die Spur auf g_2: $a_3 x_3 + a_1 x_1 = 0,$
$g_3 x_3 + g_1 x_1 = \Delta;$

für die Spur auf g_3: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$
$g_1 x_1 + g_2 x_2 = \Delta$

Die Coordinaten des Durchschnitts der zweiten Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0$$

sind die Lösungen des Systems

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0,$$
$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta.$$

7. **Lehrsatz.** **Bei dieser homogenen Coordinatenbestimmung giebt es eine und nur eine homogene lineare Function, deren zugehörige Variabelnsysteme sämmtlich unendlich grosse Werthe erhalten. Man hat also für Rechnungen mit homogenen Dreieckscoordinaten anzunehmen, dass es eine und nur eine Gerade giebt, deren Punkte sämmtlich unendlich fern sind.**

Beweis. Sei, um dies zu beweisen,

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden,

$$T_\infty \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden mit lauter unendlich fernen Punkten, so muss das System

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$
$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0,$$
$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta$$

für beliebige Werthe von a_1, a_2, a_3 unendlich grosse Lösungen geben.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist

$$A_1 : A_2 : A_3 = g_1 : g_2 : g_3, \quad \text{q. e. d.}$$

Die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist demnach

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = 0.$$

8. **Lehrsatz.** Sind T' und T'' die linken Seiten der wie gewöhnlich auf Null reducirten Gleichungen zweier Geraden, so wird die linke Seite einer beliebig durch den Schnittpunkt $T' T''$ gelegten Geraden dargestellt durch

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'',$$

worin μ' und μ'' zwei Constante bedeuten, deren Verhältniss die Gerade T eindeutig charakterisirt.

Beweis. Sollen die Geraden

$$T = 0, \quad T' = 0, \quad T'' = 0$$

einen gemeinsamen Punkt enthalten, so muss die Determinante des Systems dieser drei Gleichungen verschwinden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Hierfür ist die nothwendige und ausreichende Bedingung:

$$a_k = \mu' a_k' + \mu'' a_k'', \quad \text{q. e. d.}$$

9. **Lehrsatz.** Sind $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, so lässt sich die linke Seite der Gleichung einer jeden Geraden aus den linken Seiten der Gleichungen der gegebenen Geraden ableiten durch

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''',$$

wobei T durch das Verhältniss $\mu' : \mu'' : \mu'''$ eindeutig bestimmt ist.

Soll diese Darstellung möglich sein, so müssen sich die μ so bestimmen lassen, dass

$$a_k = \mu' a_k' + \mu'' a_k'' + \mu''' a_k'''; \quad k = 1, 2, 3.$$

Dies ist eindeutig und für endliche Werthe von μ', μ'', μ''' möglich, sobald

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

d. i. sobald die gegebenen Geraden nicht durch einen Punkt gehen.

10. Soll die Gerade $T = 0$ mit $T' = 0$ parallel gehen, so ist ausreichend und nothwendig, dass T durch den Schnittpunkt $T' T_\infty$ geht; es muss sich also T unter der Form darstellen lassen:

$$T = \mu' T' + \mu'' T_\infty.$$

Soll T überdies einen gegebenen Punkt x_k' enthalten, so müssen μ', μ'' so bestimmt werden, dass

$$\mu'(a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3') + \mu''(g_1 x_1' + g_2 x_2' + g_3 x_3') = 0,$$

d. i. $$\mu' : \mu'' = -\varDelta : T_1',$$

wenn T_1' abkürzend für $a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3'$ gesetzt wird. Also ist die Gleichung der Parallelen zu T' durch P':

$$(a_1 \varDelta - g_1 T_1') x_1 + (a_2 \varDelta - g_2 T_1') x_2 + (a_3 \varDelta - g_3 T_1') x_3 = 0.$$

11. **Gleichung des Punktes in homogenen Geradencoordinaten.**

Die Gleichung des Punktes in gewöhnlichen Geradencoordinaten sei

$$\alpha u + \beta v - 1 = 0.$$

Man füge hierzu die Transformationsformeln

$$u_1 + \alpha_1 u + \beta_1 v - 1 = 0,$$
$$u_2 + \alpha_2 u + \beta_2 v - 1 = 0,$$
$$u_3 + \alpha_3 u + \beta_3 v - 1 = 0.$$

Das Zusammenbestehen dieser vier Gleichungen bedingt das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ u_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ u_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung des Punktes in homogenen Coordinaten kann demnach als homogene lineare Function der Coordinaten dargestellt werden. Sie werde künftig in der Form benutzt:

$$(P \equiv)\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei Constanten sind, welche den Punkt eindeutig bestimmen.

12. Die Gleichung des gemeinsamen Punktes der beiden Geraden T' und T'' mit den Coordinaten u_k' und u_k'' ist:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

13. **Lehrsatz: Jede Gerade T, deren Coordinaten aus denen zweier gegebener Geraden T', T'' durch die Formeln abgeleitet werden können:**

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k''; \quad k = 1, 2, 3; \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

geht durch den Punkt $T' T''$ (so werde immer der Schnittpunkt von T' und T'' bezeichnet).

Beweis. Die so berechneten u_1, u_2, u_3 erfüllen die Gleichung

$$\mathfrak{U} = \Delta,$$

sind also in der That drei Coordinaten einer Geraden. Sie erfüllen die Gleichung des Punktes $T' T''$ (12).

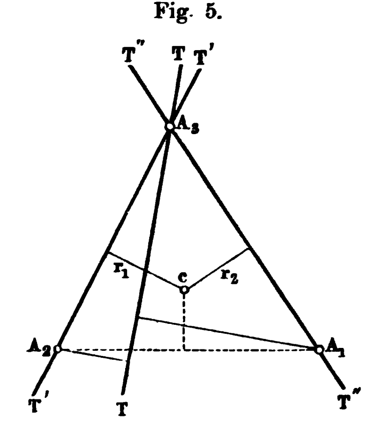
14. Da die Transformation aus einem homogenen Systeme in ein anderes durch homogene lineare Substitutionen erfolgt, so ist, wenn $T T' T''$ (aus Nr. 13) in einem beliebigen System die Coordinaten $\mathfrak{u}_k, \mathfrak{u}_k', \mathfrak{u}_k''$ haben:

$$\mathfrak{u}_k = \lambda' \mathfrak{u}_k' + \lambda'' \mathfrak{u}_k''.$$

Die Coefficienten λ', λ'' haben mithin eine vom System unabhängige, von der gegenseitigen Lage der drei Geraden allein abhängige Bedeutung.

Um dieselbe zu erkennen, bezeichnen wir die dem Fixpunkte zugewandten Seiten der Geraden als positive Seiten und wählen ein Axendreieck, in welchem A_3 auf dem Schnittpunkte $T' T''$ und A_1 auf T'', A_2 auf T' willkürlich, doch so liegen, dass sich C im Innern des Dreiecks befindet (Fig. 5).

Fig. 5.



Die Coordinaten von T' und T'' sind demnach:

	u_1	u_2	u_3
für T':	$\frac{h_1}{r'}$	0	0,
für T'':	0	$\frac{h_2}{r''}$	0,

mithin sind die Coordinaten für T:

$$u_1 = \lambda' \cdot \frac{h_1}{r'},\quad u_2 = \lambda'' \cdot \frac{h_2}{r''}.$$

Bezeichnet allgemein $\widehat{AB}$ einen spitzen oder stumpfen, von zwei Geraden A, B gebildeten Winkel, so gilt zunächst ohne Rücksicht auf Vorzeichen:

$$r\,u_1 = g_2 \sin \widehat{TT''},$$
$$r\,u_2 = g_1 \sin \widehat{TT'},$$

wenn r den Abstand des Fixpunktes von T bezeichnet. Hiernach ist:

$$\sin \widehat{TT''} : \sin \widehat{TT'} = \frac{\lambda'}{r'} : \frac{\lambda''}{r''}.$$

Bezeichnet man den von den positiven Rändern von $T' T''$ begrenzten Winkel als innern, sein Supplement als äussern Winkel der beiden Geraden, so findet man rücksichtlich der Vorzeichen die Regel:

Ist das Theilverhältniss $\lambda' : \lambda''$ positiv oder negativ, so theilt T den äussern oder beziehentlich innern Winkel $\widehat{T'T''}$, und umgekehrt.

Denn wenn T den innern Winkel $T'T''$ theilt, so haben u_1 und u_2 ungleiche Zeichen, mithin müssen dann auch $\lambda'\lambda''$ ungleiche Zeichen haben. Theilt hingegen T den äussern Winkel $T'T''$, so haben u_1 und u_2, also auch λ' und λ'', gleiche Zeichen.

15. Lehrsatz. Die Coordinaten jeder Geraden T lassen sich aus den Coordinaten dreier Geraden T', T'', T''', die nicht denselben Punkt enthalten, nach den Formeln ableiten:

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'' + \lambda''' u_k''', \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1.$$

Beweis. Zur Bestimmung der λ hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda' u_1' + \lambda'' u_1'' + \lambda''' u_1''', \\ u_2 &= \lambda' u_2' + \lambda'' u_2'' + \lambda''' u_2''', \\ u_3 &= \lambda' u_3' + \lambda'' u_3'' + \lambda''' u_3'''. \end{aligned}$$

Diese liefern endliche und eindeutige Werthe für die λ, da ja nach der Voraussetzung die Determinante dieses Systems nicht verschwindet.

16. Die Gleichung des auf der Geraden T' gelegenen unendlich fernen Punktes sei

$$\alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 = 0.$$

Dann muss

$$\alpha_1' u_1' + \alpha_2' u_2' + \alpha_3' u_3 = 0.$$

Ist e der Abstand irgend einer zu T' parallelen Geraden T von T', so hat T die Coordinaten

$$u_k = \frac{r' u_k' + e}{r' + e}.$$

Setzt man dies in die Gleichung des unendlich fernen Punktes ein, so erhält man nach einfacher Reduction:

$$r'(\alpha_1' u_1' + \alpha_2' u_2' + \alpha_3' u_3') + (\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')e = 0.$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

17. Lehrsatz: Sind $P' P''$ die linken Seiten der Gleichungen zweier Punkte, so kann die linke Seite der Gleichung jedes Punktes P der Geraden $P'P''$ auf die Form gebracht werden:

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'',$$

die Gleichung von P also auf die Form

$$(P \equiv)\ \mu' P' + \mu'' P'' = 0.$$

18. Lehrsatz. Sind P', P'', P''' die linken Seiten d Gleichungen dreier, nicht in derselben Geraden gelegenen Punkt so kann die linke Seite der Gleichung eines beliebigen Punktes auf die Form gebracht werden:

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''',$$

die Gleichung von P also auf die Form

$$(P \equiv)\ \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''' = 0.$$

Durch die μ ist in beiden Fällen der Punkt eindeutig bestimm

§. 3.

Vermischte Aufgaben über Punkt und Gerade.

1. Für die nachfolgenden Rechnungen ist es zum Theil vor theilhaft, sich der Plücker'schen Geradencoordinaten zu be dienen.

Unter den Plücker'schen Coordinaten einer Gerade versteht man die Abstände $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ der variabeln Geraden vo den drei Ecken des Axendreiecks. Dabei wollen wir die Vorzeiche ebenso bestimmen, wie bei den hier verwendeten homogenen Ger dencoordinaten. Die Plücker'schen Coordinaten werden unter Be nutzung der bisherigen Bezeichnungen aus orthogonalen Coordinate durch die Formeln abgeleitet:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{1 - \alpha_1 u - \beta_1 v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\mathfrak{u}_2 = \frac{1 - \alpha_2 u - \beta_2 v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\mathfrak{u}_3 = \frac{1 - \alpha_3 u - \beta_3 v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Man gewinnt die reciproken Transformationsformeln, indem man rechter Hand die Trinomien Glied für Glied durch den gemein samen Nenner $\sqrt{u^2 + v^2}$ theilt, die Gleichungen nach

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

auflöst und die letzten beiden Lösungen durch die erste dividirt; dann erscheinen u, v als Quotienten homogener linearer Functionen der Plücker'schen Coordinaten.

Um aus einem Plücker'schen System in ein anderes zu trans-

formiren, beziehe man beide auf dasselbe orthogonale System und setze die Lösungen für

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

aus beiden homogenen Systemen berechnet, einander gleich.

Man erhält dann für den Uebergang aus einem Plücker'schen System ins andere homogene lineare Substitutionen.

Aus der Abhängigkeit der Lösungen für

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

erhält man für die drei Plücker'schen Coordinaten einer Geraden die Gleichung:

$$g_1^2 u_1^2 + g_2^2 u_2^2 + g_3^2 u_3^2 - 2 g_1 g_2 \cos\gamma_3 u_1 u_2 - 2 g_2 g_3 \cos\gamma_1 u_2 u_3 - 2 g_3 g_1 \cos\gamma_2 u_3 u_1 = \Delta^2.$$

2. Bestimmung des Abstandes eines Punktes P' von einer Geraden T, deren Gleichung in Punktcoordinaten gegeben ist.

Sei

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der gegebenen Geraden. Setzt man in T die Coordinaten eines nicht auf der Geraden T gelegenen Punktes P' ein, so erhält T einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man die Gleichung $T = 0$ und die Coordinaten von P in ein anderes Dreiecksystem, so geht

$$T = 0 \text{ in } \mathrm{T} = 0, \quad T(x'_k) \text{ in } \mathrm{T}(\xi'_k)$$

über. Da nun $\mathrm{T}(\xi'_k)$ aus $T(x'_k)$ nur dadurch entstanden ist, dass man für x_k gleich grosse Werthe, durch ξ_k und die neuen Constanten ausgedrückt, eingesetzt hat, so hat sich der Zahlenwerth von $T(x_k)$ beim Uebergang in die neue Form $\mathrm{T}(\xi'_k)$ nicht geändert.

Der Werth, welchen das Polynom der Gleichung einer Geraden erhält, wenn man die Coordinaten eines beliebigen Punktes hineinsetzt, ändert sich demnach beim Uebergang in ein neues System nicht.

Denken wir uns nun die Transformation in ein neues System ausgeführt, welches die Axen x_1 und x_2 des alten Systems, statt der Axe x_3 dagegen die Gerade T enthält, so ist die Gleichung derselben im neuen System:

$$A\xi_3 = 0.$$

Also gilt für jeden Punkt P', wenn ξ_3 der Abstand desselben von T ist:

$$A\xi_3' = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3'.$$

Wenden wir diese Formel auf die drei Eckpunkte des Coordinatendreiecks an, bezeichnen mit $\mathfrak{u}_k$ die Plücker'schen Coordinaten von T und beachten, dass für alle Punkte auf derselben Seite von T das Polynom T ein und dasselbe Vorzeichen erhält, so erhalten wir

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{a_1 h_1}{A}, \quad \mathfrak{u}_2 = \frac{a_2 h_2}{A}, \quad \mathfrak{u}_3 = \frac{a_3 h_3}{A}.$$

Für den Abstand der Geraden vom Fixpunkte erhält man:

$$r = \frac{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3}{A}.$$

Demnach sind die Coordinaten von T:

$$u_k = \frac{\mathfrak{u}_k}{r} = \frac{a_k h_k}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3}.$$

Setzt man die Coordinaten $\mathfrak{u}_k$ in die Endgleichung von 1) ein, so erhält man:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 a_1 a_2 \cos\gamma_3 - 2 a_2 a_3 \cos\gamma_1 - 2 a_3 a_1 \cos\gamma_2.$$

Da nach unseren Voraussetzungen der Abstand vom Fixpunkte immer positiv zu nehmen ist, so hat man für A die positive oder negative Wurzel zu nehmen, je nachdem

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \gtrless 0;$$

denn dann wird in der That stets

$$(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) : A > 0.$$

Erweitert man die Gleichung einer Geraden mit ± 1, je nachdem $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \gtrless 0$, und hierauf mit dem reciproken Werthe der positiven Wurzel aus A^2, so entsteht eine neue Gleichung, wieder von der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

in welcher jedoch $A = 1$ ist. Die so reducirte Form der Gleichung einer Geraden heisse die **Normalform der Gleichung der Geraden.**

Ist $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden in der Normalform, so sind die Plücker'schen Coordinaten derselben:

$$\mathfrak{u}_k = a_k h_k.$$

Der Abstand e eines beliebigen Punktes von dieser Geraden ist:

$$e = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3.$$

Zu Gunsten späterer Entwicklungen unterscheiden wir eine zweite Normalform der Gleichung der Geraden gemäss folgender Definition:

Ist

$$a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden in beliebig erweiterter Form, so ist die zweite Normalform dieser Gleichung:

$$\frac{1}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0.$$

Ist demnach

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden in zweiter Normalform, so ist

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 1$$

und die Coordinaten dieser Geraden in Bezug auf einen Punkt P'

$$u' = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3'.$$

3. Zur Transformation aus einem homogenen Punktcoordinatensystem in ein anderes seien die Gleichungen der neuen Axen in Bezug aufs alte System und zwar in Normalform gegeben. Es seien dieselben für die neue

$$\begin{aligned} X_1\text{-Axe:}\quad & a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 = 0, \\ X_2\text{-Axe:}\quad & a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 = 0, \\ X_3\text{-Axe:}\quad & a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3 = 0. \end{aligned}$$

Für das neue System ist ein neuer Fixpunkt im Innern des neuen Axendreiecks anzunehmen. Sei ferner $\varepsilon_k = \pm 1$, je nachdem die Coordinate R_k des alten Fixpunktes in Bezug auf das neue System positiv oder negativ ist.

Dann sind die Transformationsformeln die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} X_1 &= \varepsilon_1 (a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3), \\ X_2 &= \varepsilon_2 (a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3), \\ X_3 &= \varepsilon_3 (a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3). \end{aligned}$$

4. Bestimmung des Abstandes einer Geraden T' von einem Punkte P, dessen Gleichung in Geradencoordinaten gegeben ist.

Setzt man die Coordinaten u_k' einer Geraden in die Gleichung eines Punktes ein, so erhält dieselbe im Allgemeinen einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man zu einem neuen Dreipunktsystem, so bleibt dieser Werth ungeändert, da ja für die Coordinaten dabei ihnen gleiche Werthe eingesetzt werden. Wählt man

nun ein solches neues System, in welchem P selbst Coordinatenpunkt ist, so ist die Gleichung von P im neuen System:

$$A U = 0,$$

wenn mit U die auf P bezogene Coordinate verstanden wird. Es ist mithin

$$A U' = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3'.$$

Wendet man diese Formeln auf die Seiten des Coordinatendreiecks an und bezeichnet mit x_1, x_2, x_3 die Coordinaten von P, so erhält man:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 h_1}{A}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 h_2}{A}, \quad x_3 = \frac{\alpha_3 h_3}{A}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \varDelta$$

ein, so erhält man

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Also ist

$$U' = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} (\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3').$$

Hiernach erscheint es zweckmässig, die Gleichung eines Punktes so zu kürzen, dass in der gekürzten Form

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1;$$

diese Form möge als die Normalform der Gleichung eines Punktes bezeichnet werden.

Die Normalform der in beliebig erweiterter Form gegebenen Gleichung des Punktes

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

lautet demnach

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} u_3 = 0.$$

Ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

die Gleichung eines Punktes in der Normalform, so hat die Linie T', deren Coordinaten u_1', u_2', u_3' sind, in Bezug auf P die Coordinaten:

$$U' = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3'.$$

Der Abstand des Fixpunktes von einer Geraden T, deren Coordinaten gegeben sind, ergiebt sich durch Substitution der Plücker'schen Coordinaten

$$\mathfrak{u}_k = r u_k$$

in die Identität für Plücker'sche Coordinaten. Man erhält

$$\frac{\Delta^2}{r^2} = g_1^2 u_1^2 + g_2^2 u_2^2 + g_3^2 u_3^2 - 2\, g_1 g_2 \cos\gamma_3 u_1 u_2 - 2\, g_2 g_3 \cos\gamma_1 u_2 u_3$$
$$- 2\, g_3 g_1 \cos\gamma_2 u_3 u_1.$$

Die Wurzel für r ist immer positiv zu nehmen.

Unter Benutzung dieses Werthes für r ergiebt sich der Abstand des Punktes P von der Geraden T':

$$e = r(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3').$$

5. Zur Transformation aus einem Dreipunktsystem in ein anderes seien die Gleichungen der neuen Coordinatenpunkte in Bezug auf das alte System in der Normalform gegeben, und zwar

für den Punkt U_1: $\alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 = 0,$
" " " U_2: $\alpha_1'' u_1 + \alpha_2'' u_2 + \alpha_3'' u_3 = 0,$
" " " U_3: $\alpha_1''' u_1 + \alpha_2''' u_2 + \alpha_3''' u_3 = 0.$

Alsdann sind die Transformationsformeln für u_k die Lösungen des Systems

$$U_1 = \alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3,$$
$$U_2 = \alpha_1'' u_1 + \alpha_2'' u_2 + \alpha_3'' u_3,$$
$$U_3 = \alpha_1''' u_1 + \alpha_2''' u_2 + \alpha_3''' u_3,$$

wobei U_k die Coordinaten im neuen System bezeichnen.

6. Ein Punkt P mit den Coordinaten x_k habe die Normalgleichung

$$(P \equiv)\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

so ist

$$x_k = \alpha_k h_k, \quad \alpha_k = \frac{x_k}{h_k};$$

also ist die Gleichung von P in der Normalform:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1 + \frac{x_2}{h_2} u_2 + \frac{x_3}{h_3} u_3 = 0.$$

Eine Gerade T mit den Coordinaten u_k habe die Gleichung in Normalform:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so ist

$$a_k h_k = r u_k, \quad a_k = \frac{r u_k}{h_k};$$

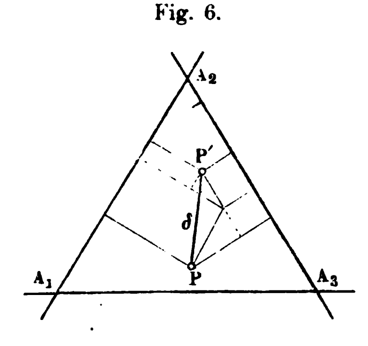
also ist die Gleichung der Geraden T in der Normalform:

$$\frac{r u_1}{h_1} x_1 + \frac{r u_2}{h_2} x_2 + \frac{r u_3}{h_3} x_3 = 0.$$

7. **Bestimmung der Entfernung zweier Punkte P und P'.**

Zieht man durch P und P' Gerade in den Richtungen beziehentlich $A_i A_k$ und $A_l A_k$, so erhält man mit der Geraden $PP' = \delta$ zusammen ein Dreieck, in welchem δ dem Winkel γ_k oder dem Winkel $180^0 - \gamma_k$ gegenüberliegt, je nachdem die Differenzen

Fig. 6.



$$\delta_i = x_i - x_i' \text{ und } \delta_l = x_l - x_l'$$

verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben (Figur 6). Die beiden übrigen Seiten sind:

$$\frac{x_i - x_i'}{\sin\gamma_k}, \quad \frac{x_l - x_l'}{\sin\gamma_k}.$$

Hiernach gilt allgemein:

$$\delta^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma_k}(\delta^2_i + \delta^2_l + 2\delta_i\delta_l\cos\gamma_k).$$

Um einen symmetrischen Ausdruck zu erhalten, bilde man $g_k{}^2\,\delta^2$, wende diese Formel für alle Cyclen der Indices 1, 2, 3 an und addire; man benutze

$$\frac{g^2_k}{\sin^2\gamma_k} = \frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{\Delta^2};$$

alsdann erhält man

$$\delta^2 = \frac{2\,g_1^2 g_2^2 g_3^2}{\Delta^2(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_1\delta_2\cos\gamma_3 + \delta_2\delta_3\cos\gamma_1 + \delta_3\delta_1\cos\gamma_2).$$

8. **Bestimmung des Winkels zwischen zwei Geraden T und T' aus den Coordinaten derselben.**

Aus den Formeln für Transformation aus homogenen in orthogonale Coordinaten folgt:

$$ru = r\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \beta_1 \\ u_2 & 1 & \beta_2 \\ u_3 & 1 & \beta_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

$$rv = -r\begin{vmatrix} u_1 & 1 & \alpha_1 \\ u_2 & 1 & \alpha_2 \\ u_3 & 1 & \alpha_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Ferner bilde man analoge Formeln durch Vertauschnng von u, v, r, u_1, u_2, u_3 gegen $u', v', r', u_1', u_2', u_3'$. Der gemeinsame Divisor aller vier Werthe ist bekanntlich gleich der doppelten Dreiecksfläche. Entwickelt man die vier Zähler als Functionen der u_k und bildet

$$\cos TT' = rr'(uu' + vr'),$$

so erhält man

$$\cos \widehat{TT'} = -\frac{rr'}{\Delta^2}(u_1 u_1' g_1^2 + u_2 u_2' g_2^2 + u_3 u_3' g_3^2 \\ - [u_1 u_2' + u_2 u_1'] g_1 g_2 \cos\gamma_3 - [u_1 u_3' + u_3 u_2'] g_3 g_2 \cos\gamma_1 \\ - [u_3 u_1' + u_1 u_3'] g_1 g_3 \cos\gamma_2).$$

Dabei ist für $\widehat{TT'}$ derjenige Winkel zu nehmen, den die dem Fixpunkte zugewandten Ränder von T und T' begrenzen.

9. Berechnung der Dreiecksfläche aus den Coordinaten der Ecken.

Das Dreieck habe die Ecken B', B'', B'''; dieselben haben die homogenen Coordinaten x_k', x_k'', x_k''', und bezogen auf ein orthogonales Hilfssystem, dessen Ursprung im Innern des Axendreiecks liegt, $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \equiv R$$

zerfällt in das Product zweier Determinanten; es ergiebt sich

$$R = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \\ 1 & x''' & y''' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}.$$

Das Product des ersten und letzten Factors ist

$$\frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3},$$

wenn $\Delta\, h_1\, h_2\, h_3$ die doppelte Fläche und die Höhen des Axendreiecks bedeuten. Ferner ist der mittle Factor das Doppelte der gesuchten Dreiecksfläche. Hieraus folgt die gesuchte Fläche zu:

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2 h_1 h_2 h_3} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}.$$

Ueber die Bedeutung des Vorzeichens der Dreiecksdeterminante

$$DD(B_1 B_2 B)_3 \equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}$$

wird wie folgt entschieden:

Zwei Dreiecke $B_i B_k B_l$ und $B_r B_s B_t$ heissen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die Bewe-

gung von B_k nach B_l, beziehentlich von B_s nach B_t, von B_i, beziehentlich B_r aus gesehen unter gleicher oder unter entgegengesetzten Richtungen erscheint.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke $B_i B_k B_l$ und $B_r B_s B_t$ sind gleichen oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem ihre Determinanten

$$DD(B_i B_k B_l) \text{ und } DD(B_r B_s B_t)$$

gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Beweis: Permutirt man zunächst die Ecken ein und desselben Dreiecks, so dass aus der Ordnung $B_1 B_2 B_3$ die Ordnung $B_i B_k B_l$ entsteht, so ist

$$DD(B_i B_k B_l) = \pm DD(B_1 B_2 B_3),$$

je nachdem ikl eine gerade oder ungerade Permutation von 1 2 3 ist. Nun sind aber alle geraden Permutationen von 1 2 3 zugleich cyklisch; in diesem Falle erscheint in der That die Bewegung von B_k nach B_l, von B_i aus gesehen, in derselben Richtung, wie die Bewegung $B_2 B_3$ von B_1 aus gesehen. Jede ungerade Permutation der drei Elemente kann aus einer cyklischen durch Vertauschung der letzten beiden Elemente derselben abgeleitet werden; ist ikl cyklisch, so ist ilk ungerade, und es ist alsdann

$$DD(B_i B_l B_k) = - DD(B_1 B_2 B_3).$$

Die Bewegungen $B_l B_k$ und $B_k B_l$ erscheinen von jedem Punkte aus unter verschiedenen Richtungen.

Hiermit ist die Behauptung für die verschiedenen Formen der Determinante ein und desselben Dreiecks bewiesen.

Ersetzt man ferner in dem Dreiecke $B_1 B_2 B_3$ und in der zugehörigen Determinante einen Punkt B_i durch irgend einen andern Punkt B_j der Ebene, so wird das neue Dreieck mit dem ursprünglichen gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sein, je nachdem B_i und B_j auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die beiden anderen Ecken gehenden Geraden liegen. Da nun aber die linke Seite der Gleichung der Geraden $P' P''$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Werthe gleichen oder entgegengesetzten Zeichens erhält, je nachdem man für die laufenden Coordinaten x_k die Coordinaten x_k''' von auf derselben oder entgegengesetzten Seiten der Geraden $P' P''$ gelegten Punkten setzt, so sind demnach die Bedingungen identisch,

unter welchen durch die Substitution B_j für B_i das Dreieck seinen Sinn und die zugehörige Determinante ihr Zeichen wechselt, q. e. d.

Die Determinante des Axendreiecks

$$DD(A_1 A_2 A_3) \equiv h_1 h_2 h_3$$

ist positiv. Die Formel

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2 h_1 h_2 h_3} DD(B_1 B_2 B_3)$$

liefert demnach einen positiven oder negativen Werth, je nachdem das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ mit dem Axendreieck $A_1 A_2 A_3$ desselben Sinnes ist oder nicht.

Berechnung der Dreiecksfläche aus den Normalgleichungen der Ecken.

Sind die Gleichungen der Ecken in der Normalform für $B^{(k)}$:

$$\alpha_1^{(k)} u_1 + \alpha_2^{(k)} u_2 + \alpha_3^{(k)} u_3 = 0,$$

so ist bekanntlich

$$x_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} h_i.$$

Setzt man diese Werthe nach R, so lässt sich $h_1 h_2 h_3$ als Factor absondern. Hiernach ergiebt sich die Dreiecksfläche aus den Gleichungen der Ecken zu

$$B_1 B_2 B_3 = \frac{\Delta}{2} \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \alpha_1'' & \alpha_2'' & \alpha_3'' \\ \alpha_1''' & \alpha_2''' & \alpha_3''' \end{vmatrix}.$$

Die Höhen und die Winkel des Dreiecks lassen sich aus Fläche und Seiten berechnen.

10. Berechnung der Höhen eines Dreiecks aus den Gleichungen der Seiten.

Das Dreieck $B' B'' B'''$ habe die Seiten $G' G'' G'''$ und die Höhen $H' H'' H'''$. Die Gleichungen der Seiten in Normalform seien

$$G^{(k)} \equiv a_1^{(k)} x_1 + a_2^{(k)} x_2 + a_3^{(k)} x_3 = 0.$$

Bezeichnet klm einen Cyklus von 1 2 3, so hat man

$$\begin{aligned} \Delta &= g_1 x_1^k + g_2 x_2^k + g_3 x_3^k, \\ H_k &= a_1^k x_1^k + a_2^k x_2^k + a_3^k x_3^k, \\ 0 &= a_1^l x_1^k + a_2^l x_2^k + a_3^l x_3^k, \\ 0 &= a_1^m x_1^k + a_2^m x_2^k + a_1^m x_3^k \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \varDelta & g_1 & g_2 & g_3 \\ H^k & a_1{}^k & a_2{}^k & a_3{}^k \\ 0 & a_1{}^l & a_2{}^l & a_2{}^l \\ 0 & a_1{}^m & a_2{}^m & a_3{}^m \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man:

$$R = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix}, \quad R_k = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ a_1{}^l & a_2{}^l & a_3{}^l \\ a_1{}^m & a_2{}^m & a_3{}^m \end{vmatrix},$$

so folgt:

$$H_k = \frac{\varDelta . R}{R_k}.$$

11. Berechnung der Fläche eines Dreiecks aus den Gleichungen der Seiten.

Unter Benutzung der soeben gebrauchten Bezeichnungen bilde man das Product:

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = R . B_1\, B_2\, B_3 . \frac{2\, h_1\, h_2\, h_3}{\varDelta}.$$

Stellt man das Product als Determinante dar und berücksichtigt, dass

$$a_1{}^i x_1{}^k + a_2{}^i x_2{}^k + a_3{}^i x_3{}^k \begin{cases} = H_k \\ = 0 \end{cases}, \text{ je nachdem } i \begin{matrix} = k \\ \gtrless k \end{matrix},$$

so erhält man:

$$H_1 . H_2 . H_3 = R . B_1\, B_2\, B_3 . \frac{2\, h_1\, h_2 h_3}{\varDelta}.$$

Setzt man für die Höhen die oben berechneten Werthe ein, so erhält man die gesuchte Dreiecksfläche zu

$$B_1\, B_2\, B_3 = \frac{\varDelta^4}{2\, h_1\, h_2\, h_3} \cdot \frac{R^2}{R_1\, R_2\, R_3}.$$

12. Berechnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks aus den Gleichungen der Seiten.

Die Formeln der vorigen beiden Abschnitte liefern:

$$\tfrac{1}{2} H_k\, G_k = G_k . \frac{\varDelta . R}{2 . R_k} = \frac{\varDelta^4}{2\, h_1\, h_2 h_3} \cdot \frac{R^2}{R_k R_l\, R_m}.$$

Hieraus folgt:

$$G_k = g_1\, g_2\, g_3 \cdot \frac{R}{R_l R_m}.$$

Nach der Formel

$$\sin B_m = \frac{H_k}{G_l}$$

$$\sin B_m = \frac{\Delta \,.\, R_m}{g_1 g_2 g_3}.$$

§. 4.

Harmonische Reihen und Büschel am vollständigen Viereck und Vierseit.

1. Harmonische Punkte und Strahlen.

Definition: Die Punkte $P_2 P_3$ sind den Punkten $P_0 P_1$ derselben Geraden harmonisch conjugirt, wenn

a) $$P_0 P_2 : P_2 P_1 = -(P_0 P_3 : P_3 P_1).$$

Aus a) folgt durch Umstellung

$$P_2 P_0 : P_0 P_3 = -(P_2 P_1 : P_1 P_3).$$

Es sind demnach auch $P_0 P_1$ den Punkten $P_2 P_3$ conjugirt; es mögen daher kürzer die beiden Punktpaare als zwei harmonische Paare bezeichnet werden.

Man sieht ferner leicht, dass es gleichgültig ist, wie man die Punkte jedes Paares ordnet; denn es ist z. B. auch

$$P_1 P_2 : P_2 P_0 = -(P_1 P_3 : P_3 P_0),$$

oder

$$P_0 P_3 : P_3 P_1 = -(P_0 P_2 : P_2 P_1),$$

d. h. wenn die Punktpaare $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ harmonisch sind, so sind auch die Paare $P_1 P_0$ und $P_2 P_3$, oder $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ harmonisch; man findet also allgemein, dass man aus zwei harmonischen Paaren wieder harmonische Paare erhält, wenn man die Paare unter sich und die Punkte jeden Paares beliebig anders anordnet. Es ist daher bei der Angabe, dass zwei Paar Punkte harmonisch sind, die Ordnung der Paare und die Ordnung innerhalb der Paare gleichgültig.

2. Werden die Coordinaten zweier Punkte $P_2 P_3$ aus denen zweier gegebener Punkte $P_0 P_1$ nach den Formeln abgeleitet:

b) $$x_{k2} = \frac{\lambda x_{k0} + \mu x_{k1}}{\lambda + \mu},$$
$$x_{k3} = \frac{\lambda x_{k0} - \mu x_{k1}}{\lambda - \mu},$$

so sind die Paare $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ harmonisch.

Denn es verhält sich

$$P_0P_2 : P_2P_1 = \mu : \lambda,$$
$$P_0P_3 : P_3P_1 = -\mu : \lambda,$$

also ist

$$P_0P_2 : P_2P_1 = -(P_0P_3 : P_3P_1), \text{ q. e. d.}$$

3. Wird die linke Seite der Gleichung zweier Punkte P_2P_3 aus den Polynomien der Gleichungen zweier gegebener Punkte P_0P_1 nach den Formeln abgeleitet:

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} P_2 &\equiv mP_0 + nP_1 = 0 \\ P_3 &\equiv mP_0 - nP_1 = 0, \end{aligned}$$

so sind die Paare P_0P_1 und P_2P_3 harmonisch.

Denn sind A, B, C, D die Multiplicatoren, durch welche die Gleichungen der vier Punkte in Normalform übergeführt werden, so erhält man durch Substitution der Coordinaten der Seiten des Axendreiecks in die Gleichungen

$$CP_2 = C\left(\frac{m}{A} \cdot AP_0 + \frac{n}{B} \cdot BP_1\right),$$

$$DP_3 = D\left(\frac{m}{A} \cdot AP_0 - \frac{n}{B} \cdot BP_1\right)$$

die Formeln:

$$x_{k2} = \frac{mC}{A} x_{k0} + \frac{nC}{B} x_{k1},$$

$$x_{k3} = \frac{mD}{A} x_{k0} - \frac{nD}{B} x_{k1}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{C} = \frac{m}{A} + \frac{n}{B},$$

$$\frac{1}{D} = \frac{m}{A} - \frac{n}{B};$$

mithin sind die Formeln für x_{k2} und x_{k3} in Uebereinstimmung mit b).

4. Definition: Das Strahlenpaar T_2T_3 ist dem Strahlenpaare T_0T_1 desselben Büschels harmonisch conjugirt, wenn

$$\text{d)} \quad \sin \widehat{T_0T_2} : \sin \widehat{T_2T_1} = -(\sin \widehat{T_0T_3} : \sin \widehat{T_3T_1}).$$

Man weist wie oben für Punkte nach, dass bei der Angabe: „ein Strahlenpaar ist einem andern harmonisch conjugirt", die Ordnung der Paare und die Ordnung der Strahlen jedes Paares gleichgültig ist.

5. Werden die Coordinaten zweier Strahlen $T_2 T_3$ aus denen zweier gegebener Strahlen $T_0 T_1$ nach den Formeln abgeleitet:

$$\text{e)} \quad \begin{aligned} u_{k2} &= \frac{\lambda u_{k0} + \mu u_{k1}}{\lambda + \mu}, \\ u_{k3} &= \frac{\lambda u_{k0} - \mu u_{k1}}{\lambda - \mu}, \end{aligned}$$

so sind $T_0 T_1$ und $T_2 T_3$ harmonische Paare.

Denn es ist

$$\sin \widehat{T_0 T_2} : \sin \widehat{T_2 T_1} = -\left(\frac{\mu}{r_1} : \frac{\lambda}{r_0}\right),$$

$$\sin \widehat{T_0 T_3} : \sin \widehat{T_3 T_1} = \frac{\mu}{r_1} : \frac{\lambda}{r_0},$$

also in der That:

$$\sin \widehat{T_0 T_2} : \sin \widehat{T_2 T_1} = -(\sin \widehat{T_0 T_3} : \sin \widehat{T_3 T_1}).$$

6. Werden die Polynomien der Gleichungen zweier Geraden $T_2 T_3$ aus denen der Gleichungen zweier gegebenen Geraden $T_0 T_1$ nach den Formeln abgeleitet:

$$\text{f)} \quad \begin{aligned} T_2 &\equiv m T_0 + n T_1 = 0, \\ T_3 &\equiv m T_0 - n T_1 = 0, \end{aligned}$$

so sind die beiden Paare $T_0 T_1$, $T_2 T_3$ harmonisch.

Seien $A B C D$ die Multiplicatoren der Gleichungen

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0;$$

die Abstände der Geraden vom Fixpunkte seien $r_0 r_1 r_2 r_3$. Setzt man nun die Coordinaten der Seiten des Axendreiecks in die Gleichungen:

$$C T_2 = C\left(\frac{m}{A} A T_0 + \frac{n}{B} B T_1\right),$$

$$D T_3 = D\left(\frac{m}{A} A T_0 - \frac{n}{B} B T_1\right),$$

so erhält man:

$$r_2 u_{k2} = \frac{m C}{A} \cdot r_0 u_{k0} + \frac{n C}{A} \cdot r_1 u_{k1}$$

$$r_3 u_{k3} = \frac{m C}{A} r_0 u_{k0} - \frac{n C}{A} \cdot r_1 u_{k1},$$

oder:

$$u_{k2} = \frac{r_0 m . C}{A . r_2} . u_{k0} + \frac{r_1 n . C}{B . r_2} u_{k1},$$

$$u_{k3} = \frac{r_0 m D}{A . r_3} u_{k0} - \frac{r_0 n . D}{B . r_3} u_{k1}.$$

Hieraus folgen die Werthe

$$\frac{r_2}{C} = \frac{r_0 m}{A} + \frac{r_1 n}{B},$$

$$\frac{r_3}{D} = \frac{r_0 m}{A} - \frac{r_1 n}{B};$$

demnach sind die Formeln für u_{k2} und u_{k3} in Uebereinstimmung mit e).

7. Zwei Paare harmonische Punkte werden von jedem Punkte aus durch zwei Paare harmonische Strahlen projicirt.

Sind $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$ die projicirten harmonischen Punkte, Π das Projectionscentrum, $T_0\, T_1$ und $T_2\, T_3$ die Projectionsstrahlen für die gleichbenannten Punkte, so sind die Gleichungen dieser Strahlen:

$$T_0 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_{10} & x_{20} & x_{30} \end{vmatrix} = 0, \quad T_1 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

$$T_2 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda x_{10} + \mu x_{11}, & \lambda x_{20} + \mu x_{21}, & \lambda x_{30} + \mu x_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

$$T_3 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda x_{10} - \mu x_{11}, & \lambda x_{20} - \mu x_{21}, & \lambda x_{30} - \mu x_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$T_2 \equiv \lambda T_0 + \mu T_1, \quad T_3 \equiv \lambda T_0 - \mu T_1,$$

übereinstimmend mit f).

8. Zwei Paar harmonische Strahlen werden durch jede Gerade in zwei Paaren harmonische Punkte geschnitten.

Sind $T_0\, T_1$ und $T_2\, T_3$ die harmonischen Strahlen und ist $\mathfrak{T}$ die schneidende Gerade, so sind die Gleichungen der Punkte $P_0 P_1 P_2 P_3$ in denen die Gerade $\mathfrak{T}$ die gleichnamigen Strahlen schneidet:

$$P_0 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ u_{10} & u_{20} & u_{30} \end{vmatrix} = 0, \quad P_1 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

$$P_2 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ \lambda u_{10} + \mu u_{11}, & \lambda u_{20} + \mu u_{21}, & \lambda u_{30} + \mu u_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

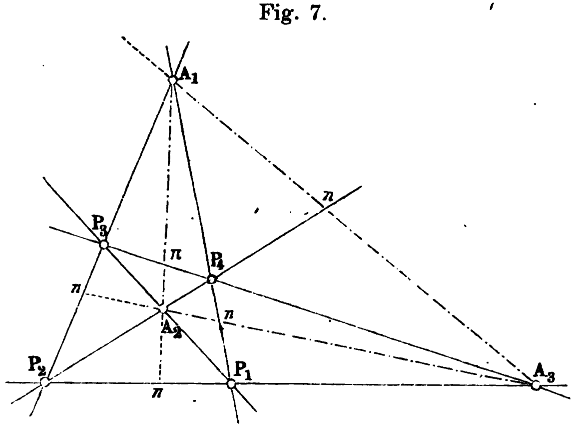
$$P_3 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ \lambda u_{10} - \mu u_{11}, & \lambda u_{20} - \mu u_{21}, & \lambda u_{30} - \mu u_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt

$$P_2 \equiv \lambda P_0 + \mu P_1, \quad P_3 \equiv \lambda P_0 - \mu P_1, \quad \text{q. e. d.}$$

8. **Das vollständige Viereck** (Fig. 7). Das vollständige Viereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ hat sechs Seiten, nämlich die Geraden, welche je zwei der vier Eckpunkte verbinden.

Fig. 7.



Sechs Gerade haben im Allgemeinen 15 Schnittpunkte; jeder Punkt, in welchem drei Gerade sich schneiden, enthält drei zusammenfallende Schnitte. Denn schneiden sich die Geraden T_1 T_2 T_3 in einem Punkte, so liegen auf demselben die Schnitte von T_1 mit T_2, von T'_1 mit T_3 sowie von T_2 mit T_3.

Da nun in jeder der vier Ecken des vollständigen Vierecks sich drei von den sechs Seiten treffen, so zählen demnach diese Ecken als 12 Schnittpunkte. Mithin treffen sich die sechs Seiten ausser in den vier Ecken noch in drei anderen Punkten.

Das Dreieck dieser drei Punkte mag das **dem Viereck conjugirte Dreieck** heissen.

Auf jeder von sechs Geraden liegen fünf Schnittpunkte mit den übrigen Geraden; ein Punkt der Geraden, in dem sich zwei andere schneiden, enthält zwei Schnittpunkte. Da nun jede Vier-

ecksseite durch zwei Ecken geht, und in jeder derselben sich noch zwei andere Seiten schneiden, so folgt, dass jede Vierecksseite eine und nur eine Ecke des conjugirten Dreiecks enthält.

Man wähle dieses Dreieck zum Axendreieck und bezeichne die Ecken mit $A_1 A_2 A_3$, welche auf den Seiten $P_4 P_1, P_4 P_2, P_4 P_3$ liegen.

Die Gleichung von P_4 in Bezug auf dieses Dreieck sei

$$P_4 \equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0.$$

Die Gleichung jedes Punktes Π, der mit $P_4 A_i$ auf derselben Geraden liegt, wird aus der Gleichung des Punktes P_4 und aus der des Punktes A_i:

$$A_i \equiv u_i = 0$$

mit Hülfe der Formel gewonnen:

$$\Pi \equiv P_4 + n u_i = 0,$$

worin n irgend eine positive oder negative Zahl bezeichnet.

In den Gleichungen $\Pi = 0$ und $P_4 = 0$ sind demnach nur die Coefficienten von u_i verschieden; die Coefficienten der anderen beiden Coordinaten sind in beiden Gleichungen dieselben.

Die Gleichungen der vier Punkte haben demnach, wenn $b\,c\,d$ drei noch zu bestimmende Zahlen bedeuten, die Form:

$$\begin{aligned} P_4 &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \\ P_1 &\equiv a\, u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0 \\ P_2 &\equiv a_1 u_1 + b\, u_2 + a_3 u_3 = 0 \\ P_3 &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + c\, u_3 = 0. \end{aligned}$$

Von den letzten drei Punkten liegen je zwei $P_i P_k$ mit dem ungleichnamigen Eckpunkte A_l auf einer Geraden; denn durch jeden Eckpunkt A gehen zwei Seiten des Vierecks; da nun A_l auf $P_4 P_l$ enthalten ist, so muss A_l auch der Geraden durch die anderen beiden Punkte $P_i P_k$ angehören.

Demnach kann man P_i und P_k durch zwei geeignete Multiplicatoren so erweitern, dass die Coefficienten von u_i und u_k in beiden Gleichungen übereinstimmen. Dazu ist aber erforderlich, dass vor der Erweiterung diese beiden Coefficienten in der einen Gleichung dasselbe Verhältniss haben, wie die beiden Coefficienten in der andern Gleichung.

Wendet man diese Bemerkung auf die drei Paare $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$ an, welche mit den bez. Punkten $A_3 A_1 A_2$ auf einer Geraden liegen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} a : a_2 &= a_1 : b, \quad \text{oder} \quad ab = a_1 a_2, \\ b : a_3 &= a_2 : c, \quad \text{„} \quad bc = a_2 a_3, \\ c : a_1 &= a_3 : a, \quad \text{„} \quad ca = a_3 a_1. \end{aligned}$$

Multiplicirt man je zwei dieser Formeln und kürzt das Resultat durch Benutzung der dritten, so erhält man:

$$a^2 = a_1^2, \quad b^2 = a_2^2, \quad c^2 = a_3^2.$$

Da nun die vier Punkte sämmtlich von einander verschieden sind, so bleibt nur die Wahl:

$$a = -a_1, \quad b = -a_2, \quad c = -a_3.$$

Es ergeben sich demnach die Gleichungen der vier Eckpunkte in den Formen:

$$\text{g)} \quad \begin{aligned} P_4 &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \\ P_1 &\equiv -a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \\ P_2 &\equiv a_1 u_1 - a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \\ P_3 &\equiv a_1 u_1 + a_2 u_2 - a_3 u_3 = 0. \end{aligned}$$

Man kann dieses Resultat auch folgendermaassen zusammenfassen:

Die Gleichungen der Ecken eines Vierecks, welches dem Axendreieck conjugirt ist, sind die vier geometrisch verschiedenen Gleichungen, welche in der (arithmetisch achtdeutigen) Form enthalten sind:

$$\text{h)} \quad \sqrt{a_1^2}\, u_1 + \sqrt{a_2^2}\, u_2 + \sqrt{a_3^2}\, u_3 = 0.$$

9. Ist $i, k, l = 1, 2, 3$, so ist die Gleichung des Punktes Π, welcher den Geraden $P_i P_k$ und $A_i A_k$ gemeinsam ist,

$$\text{i)} \quad \Pi \equiv P_i - P_k = 0.$$

Denn Π liegt hiernach auf $P_i P_k$; ferner ist nach g), wenn man, was ohne Beschränkung erlaubt ist, $i\,k\,l$ cyklisch ordnet,

$$P_i - P_k = -2\, a_i u_i + 2\, a_k u_k.$$

Daher wird $\Pi = 0$ von $u_i = 0 \;\; u_k = 0$, d. i. von den Coordinaten der Geraden $A_i A_k$ befriedigt, liegt also auch auf $A_i A_k$.

Die Gleichung des Punktes A_l hingegen hat die Form

$$\text{k)} \quad A_l \equiv P_i + P_k = 0;$$

denn es ist

$$P_i + P_k = 2\, a_l u_l.$$

Aus den Formeln

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv P_i - P_k = 0 \\ A_l &\equiv P_i + P_k = 0 \end{aligned}$$

folgt, dass $P_i P_k$ und ΠA_l harmonische Paare sind.

Aehnlich überzeugt man sich, dass die Gleichung des Punktes Π, in welchem $P_4 P_i$ die Gerade $A_k A_l$ schneidet und die Gleichung von A_i (welcher auf $P_4 P_i$ liegt) erhalten werden durch:

$$\text{l)} \quad \begin{aligned} \Pi &\equiv P_4 + P_i = 0 \\ A_i &\equiv P_4 - P_i = 0. \end{aligned}$$

Es sind demnach auch $P_4 P_i$ und ΠA_i harmonische Paare. Beide Ergebnisse setzen den Satz zusammen:

Zwei Ecken $P_r P_s$ eines Vierecks bilden mit der auf $P_r P_s$ liegenden Ecke des conjugirten Dreiecks und mit dem Punkte, in welchem $P_r P_s$ von der Geraden durch die beiden anderen Dreieckspunkte geschnitten wird, zwei harmonische Paare.

10. Die Coordinaten der Ecken des Vierecks ergeben sich aus denen von P_4 wie folgt:

Bringt man die vier Gleichungen g) auf die Normalform und substituirt die Coordinaten der drei Dreiecksecken, so erhält man zunächst

$$x_{k4} = \frac{a_k h_k}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$x_{11} = \frac{-a_1 h_1}{-a_1 + a_2 + a_3}, \quad x_{21} = \frac{a_2 h_2}{-a_1 + a_2 + a_3}, \quad x_{31} = \frac{a_3 h_3}{-a_1 + a_2 + a_3},$$

$$x_{12} = \frac{a_1 h_1}{a_1 - a_2 + a_3}, \quad x_{22} = \frac{-a_2 h_2}{a_1 - a_2 + a_3}, \quad x_{32} = \frac{a_3 h_3}{a_1 - a_2 + a_3},$$

$$x_{13} = \frac{a_1 h_1}{a_1 + a_2 - a_3}, \quad x_{23} = \frac{a_2 h_2}{a_1 + a_2 - a_3}, \quad x_{33} = \frac{-a_3 h_3}{a_1 + a_2 - a_3}.$$

Aus diesen Formeln folgt, wenn $\varkappa, \lambda, \mu$ drei noch zu bestimmende Factoren bezeichnen:

$$\text{m)} \quad \begin{array}{lll} x_{11} = -\varkappa x_{14}, & x_{21} = \varkappa x_{24}, & x_{31} = \varkappa x_{34}, \\ x_{12} = \lambda x_{14}, & x_{22} = -\lambda x_{24}, & x_{32} = -\lambda x_{34}, \\ x_{13} = \nu x_{14}, & x_{23} = \mu x_{24}, & x_{33} = -\mu x_{34}. \end{array}$$

Die Werthe von $\varkappa, \lambda, \mu$ erhält man, indem man die Coordinaten in die Identität

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta \quad \text{substituirt.}$$

Dann erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$\text{n)} \quad \varkappa = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_1 x_{14}}, \quad \lambda = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_2 x_{24}}, \quad \mu = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_3 x_{34}}.$$

Die Formeln m) und n) liefern die Coordinaten der Punkte $P_1 P_2 P_3$.

Man kann dieselben auch folgendermaassen zusammenfassen:

Die Eckpunkte eines dem Axendreiecke zugehörigen Vierecks $i = 1, 2, 3, 4$ sind die vier verschiedenen Punkte, deren Coordinaten für gegebene $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Proportion erfüllen:

$$\text{o)} \quad x_{1i}^2 : x_{2i}^2 : x_{3i}^2 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2.$$

11. Man kann die in 8) und 10) gegebenen Sätze in folgender Weise umkehren:

Sind $a_1\, a_2\, a_3$ drei gegebene Zahlen, so sind die vier verschiedenen Punkte, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind:

$$\sqrt{a_1^2}u_1 + \sqrt{a_2^2}u_2 + \sqrt{a_3^2}u_3 = 0$$

die Ecken eines dem Axendreieck conjugirten Vierecks.

Die vier Punkte P_i, deren Coordinaten für gegebene Werthe von $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ der Proportion genügen:

$$x_{1i}^2 : x_{2i}^2 : x_{3i}^2 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2,$$

bilden ein dem Axendreieck conjugirtes Viereck.

Denn bildet man, um den ersten Theil der Umkehrung zu beweisen, die Gleichungen der vier Punkte, so sieht man leicht, dass auf der Verbindungsgeraden je zweier derselben eine und nur eine Ecke des Axendreiecks enthalten ist; dass ferner durch jede Ecke des Axendreiecks nur zwei Seiten des Vierecks gehen. Demnach sind die Ecken des Axendreiecks in der That die drei Schnittpunkte, welche durch die sechs Seiten des Vierecks noch ausser den vier gegebenen Ecken bestimmt werden.

Den Beweis des zweiten Theils kann man führen, indem man aus den Coordinaten der vier Punkte die Gleichungen derselben ableitet. Man findet dann nach einfachen Reductionen, dass dieselben unter der Form enthalten sind

$$\sqrt{a_1^2}u_1 + \sqrt{a_2^2}u_2 + \sqrt{a_3^2}u_3 = 0.$$

Diese Entwicklungen lehren ferner, dass ein Viereck durch das conjugirte Dreieck und einen Eckpunkt bestimmt ist.

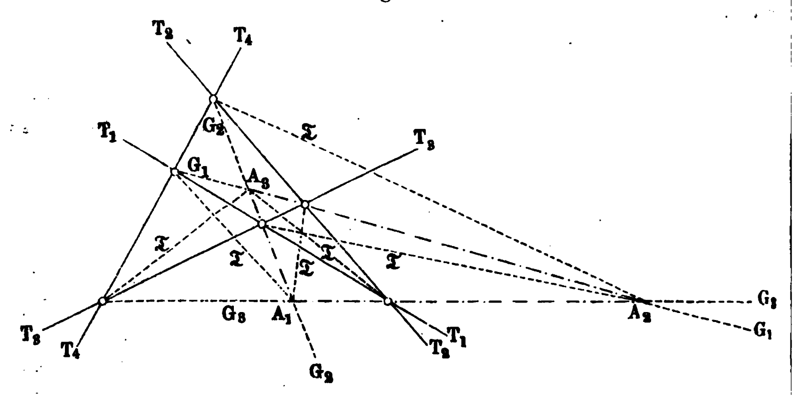
12. Das vollständige Vierseit (Fig. 8 a. f. S.). Ein vollständiges Vierseit wird von vier Geraden gebildet. Zu demselben gehören die sechs Ecken, in welchen sich die vier Seiten des Vierseits schneiden.

Sechs Punkte werden zu je zweien im Allgemeinen durch 15 Gerade verbunden. Wenn drei der Punkte auf einer Geraden liegen, so fallen in derselben drei von den Verbindungsgeraden je zweier Punkte zusammen. Da nun auf jeder der vier Seiten drei der sechs Ecken liegen, so vertreten demnach diese vier Seiten zwölf Verbindungsgerade.

Die sechs Ecken des Vierseits bestimmen demnach ausser den vier Seiten noch drei andere Gerade. Das von denselben gebildete Dreieck mag das dem Vierseit conjugirte Dreieck heissen.

Durch jeden von sechs Punkten gehen fünf Verbindungsgerade mit den übrigen Punkten; liegen zwei derselben mit dem betreffen-

Fig. 8.



den Punkte auf einer Geraden, so fallen in derselben zwei der fünf Verbindungsgeraden zusammen.

Da nun in jeder Ecke des Vierseits sich zwei Seiten schneiden, in welchen noch je zwei Ecken liegen, so folgt, dass **durch jede Ecke eine Seite des conjugirten Dreiecks geht.**

Man wähle dieses Dreieck zum Axendreieck; man bezeichne die vier Seiten mit $T_4\ T_1\ T_2\ T_3$ und bezeichne **die** Seiten des Axendreiecks mit $G_1\ G_2\ G_3$, welche durch die Punkte $T_4\,T_1$, $T_4\,T_2$, $T_4\,T_3$ gehen.

Die Gleichung von T_4 sei

$$T_4 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Da T_i durch T_4 geht, so setzt sich die Gleichung von T_i aus der von T_4 und der von G_i

$$G_i \equiv x_i = 0$$

nach der Formel zusammen:

$$T_i \equiv T_4 + n x_i = 0.$$

Demnach weichen die Gleichungen T_i und T_4 nur in den Coefficienten der Coordinate x_i von einander ab. Sind $a\,b\,c$ drei noch zu bestimmende Zahlen, so haben demnach die Gleichungen der vier Seiten des Vierseits die Form

$$\begin{aligned}
T_4 &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\\
T_1 &\equiv a\ x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\\
T_2 &\equiv a_1 x_1 + b\ x_2 + a_3 x_3 = 0,\\
T_3 &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + c\ x_3 = 0.
\end{aligned}$$

Da nun, wenn $i, k, l = 1, 2, 3$, die Geraden $T_i\, T_k$ und G_l ein Büschel bilden, so lassen sich T_i und T_k so erweitern, dass in diesen Gleichungen die Coefficienten von x_i und x_k übereinstimmen; dies ist nur möglich, wenn die Proportionen gelten:

$$a : a_2 = a_1 : b, \text{ oder } ab = a_1 a_2,$$
$$b : a_3 = a_2 : c, \quad „ \quad bc = a_2 a_3,$$
$$c : a_1 = a_3 : a, \quad „ \quad ca = a_3 a_1.$$

Hieraus folgt wie oben:

$$a = -a_1, \quad b = -a_2, \quad c = -a_3.$$

Die Gleichungen der vier Seiten in Bezug auf das conjugirte Dreieck haben demnach die Form:

$$\text{p)} \quad \begin{aligned} T_4 &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \\ T_1 &\equiv -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \\ T_2 &\equiv a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \\ T_3 &\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Es sind dies die vier verschiedenen Geraden, welche unter der Formel enthalten sind:

$$\text{q)} \quad \sqrt{a_1^2}\, x_1 + \sqrt{a_2^2}\, x_2 + \sqrt{a_3^2}\, x_3 = 0.$$

13. Die Gerade, welche den Punkt $T_i\, T_k$ mit dem Punkte $G_i\, G_k$ verbindet, hat, wenn $i\, k\, l$ cyklisch ist, die Gleichung

$$\text{r)} \quad \mathfrak{T} \equiv T_i - T_k = -2\, a_i x_i + 2\, a_k x_k = 0.$$

Denn $\mathfrak{T}$ bildet mit $T_i T_k$ ein Büschel und wird von $x_i = 0$, $x_k = 0$ befriedigt.

Die Seite G_l des conjugirten Dreiecks, welche durch $T_i T_k$ geht, hat die Gleichung

$$\text{s)} \quad G_l \equiv T_i + T_k = 2\, a_l x_l = 0.$$

Die Gerade $\mathfrak{T}$, welche $T_4\, T_i$ mit $G_k\, G_l$ verbindet, hat die Gleichung

$$\text{t)} \quad \mathfrak{T} \equiv T_4 + T_i = 2\, a_k x_k + 2\, a_l x_l = 0.$$

Die Gleichung der Geraden G_i kann geschrieben werden:

$$\text{u)} \quad G_i \equiv T_4 - T_i (= 2\, a_i x_i) = 0.$$

Aus den Formeln p) q) r) s) ergiebt sich der Satz:

Zwei Seiten $T_r\, T_s$ eines Vierseits, die durch den Punkt $T_r\, T_s$ gehende Seite des conjugirten Dreiecks und die Verbindungsgerade von $T_r\, T_s$ mit dem Schnittpunkte der beiden anderen Seiten des Dreiecks bilden zwei Paar harmonische Strahlen.

14. Die Coordinaten der Seiten eines Vierseits in Bezug auf das conjugirte Dreieck lassen sich folgendermaassen ableiten.

$C_1\, C_2\, C_3\, C_4$ seien die Factoren, welche die Gleichungen p) in Normalform überführen; $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ die Abstände des Fixpunktes von den vier Seiten. Alsdann sind die Coordinaten derselben:

$$
\begin{array}{llllll}
u_{14} = & \frac{1}{r_4} C_4 . a_1 h_1, & u_{24} = & \frac{1}{r_4} C_4 . a_2 h_2, & u_{34} = & \frac{1}{r_4} C_4 . a_3 h_3, \\
u_{11} = & -\frac{1}{r_1} C_1 . a_1 h_1, & u_{21} = & \frac{1}{r_1} C_1 . a_2 h_2, & u_{31} = & \frac{1}{r_1} C_1 . a_3 h_3, \\
u_{12} = & \frac{1}{r_2} C_2 . a_1 h_1, & u_{22} = & -\frac{1}{r_2} C_2 . a_2 h_2, & u_{32} = & \frac{1}{r_2} C_2 . a_3 h_3, \\
u_{13} = & \frac{1}{r_3} C_3 . a_1 h_1, & u_{23} = & \frac{1}{r_3} C_3 . a_2 h_2, & u_{33} = & -\frac{1}{r_3} C_3 . a_3 h_3.
\end{array}
$$

Bedeuten λ, μ, ν drei noch zu bestimmende Zahlen, so haben demnach die Coordinaten von $T_1\, T_2\, T_3$ die Form:

$$
\text{v)} \quad
\begin{array}{llllll}
u_{11} = & -\lambda u_{14}, & u_{21} = & \lambda u_{24}, & u_{31} = & \lambda u_{34}, \\
u_{12} = & \mu u_{14}, & u_{22} = & -\mu u_{24}, & u_{32} = & \mu u_{34}, \\
u_{13} = & \nu u_{14}, & u_{23} = & \nu u_{24}, & u_{33} = & -\nu u_{34}.
\end{array}
$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Identität

$$g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 = \Delta$$

erhält man die Werthe:

$$\text{w)} \quad \lambda = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_1 r_1 u_{14}}, \quad \mu = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_2 r_2 u_{24}}, \quad \nu = \frac{\Delta}{\Delta - 2 g_3 r_3 u_{34}}.$$

Aus den Formeln v) und w) bestimmen sich die Coordinaten einer Seite des Vierseits aus denen der drei anderen.

Die Coordinaten der Seiten T_i eines Vierseits erfüllen demnach eine Proportion von der Form:

$$\text{x)} \quad u_{1i}^2 \; u_{2i}^2 : u_{3i}^2 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2.$$

15. Man beweist leicht folgende Umkehrungen:

Die vier Geraden, deren Gleichungen unter der Form enthalten sind:

$$\sqrt{a_1^2}\, x_1 + \sqrt{a_2^2}\, x_2 + \sqrt{a_3^2}\, x_3 = 0,$$

bilden ein dem Axendreiecke conjugirtes Vierseit. Die vier Geraden, deren Coordinaten für drei gegebene Zahlen $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ die Proportion erfüllen:

$$u_1^2 : u_2^2 : u_3^2 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2 : \alpha_3^2,$$

sind die Seiten eines dem Axendreiecke conjugirten Vierseits.

§. 5.

Sätze über Curven zweiten Grades.

1. Sind

$$f(x,y) = 0 \text{ und } \varphi(u,v) = 0$$

Gleichungen n^{ten} Grades zwischen den orthogonalen Punkt- und Plancoordinaten eines variabeln Punktes, beziehentlich einer enveloppirenden Geraden, so werden dieselben beim Uebergang zu homogenen Coordinaten zunächst im Allgemeinen in nicht homogenen Functionen derselben verwandelt. Multiplicirt man diejenigen Glieder dieser Functionen, deren Grad hinter dem Grade der Function um δ Einheiten zurückbleibt, mit

$$\left(\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3}{\varDelta}\right)^\delta, \text{ beziehentlich } \left(\frac{g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3}{\varDelta}\right)^\delta,$$

so erhalten alle Glieder ein und denselben Grad.

Die Gleichung einer jeden Curve n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Classe in homogenen Coordinaten kann demnach als homogene Function n^{ten} Grades derselben dargestellt werden. Wir setzen künftig bei Anwendung homogener Coordinaten immer diese Darstellungsweise voraus. Bei Anwendung Plücker'scher Coordinaten ist Gleiches nicht möglich, sobald ungerade Werthe von δ vorkommen; es lässt sich dann die Function n^{ten} Grades nur in die Summe einer homogenen Function n^{ten} und einer $(n - 1)^{ten}$ Grades verwandeln.

Die Transformationsformeln lehren, dass die Gleichungen in homogenen Punkt- und Plancoordinaten nicht homogene Gleichungen in orthogonalen Coordinaten von demselben Grade liefern.

Wird ein Dreieck zu Grunde gelegt, das eine unendlich ferne Seite $(A_1 A_2)$ hat, so haben alle im Endlichen gelegenen Punkte einen constanten (unendlich grossen) Abstand (x_3) von derselben. Die Potenzen dieser Coordinate verschmelzen im Allgemeinen mit Coefficienten der Gleichung zu endlichen Constanten; aus der homogenen Gleichung zwischen $x_1 x_2 x_3$ wird eine nichthomogene Gleichung zwischen den Abständen des variabeln Punktes von zwei Geraden, d. i. eine Gleichung in Descartes'schen Coordinaten.

Um zu bestimmen, wie sich die Plancoordinaten für ein solches System umgestalten lassen, lege man durch A_3 eine Pa-

rallele T' zur variabeln Geraden T; sie hat von T den Abstand $\mathfrak{u}_3$, von $A_1 A_2$ die Abstände $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$; T schneide auf $A_3 A_1$ und $A_3 A_2$ die Strecken $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ ab, welche von A_3 nach A_1 und A_2 positiv gerechnet werden mögen. Haben nun $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ die (unendlichen) Längen s_1 und s_2, so ist:

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_3 s_1 . u, \quad \text{also } u_1 = u_3 . s_1 . u,$$

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_3 s_2 . v, \quad \text{also } u_2 = u_3 . s_2 . v.$$

Setzt man dies in eine homogene Gleichung der u_k ein, so hebt sich u_3 hinweg; die unendlichen Werthe $s_1 s_2$ verschmelzen im Allgemeinen mit den Coefficienten zu endlichen Constanten und es erübrigt eine nicht homogene Gleichung zwischen den reciproken Abschnitten der variabeln Geraden auf zwei sich schneidenden Axen, d. i. zwischen den orthogonalen Plancoordinaten.

Hat das Axendreieck eine unendlich ferne Ecke A_3, so laufen also $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ parallel. Die variable Gerade schneidet dann von den unendlichen Seiten $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ von A_3 aus gerechnet dasselbe Stück v_3 ab, von A_1 und A_2 aus gerechnet seien die Abschnitte v_1 und v_2, und zwar positiv nach A_3 zu.

Alsdann verhält sich

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3$$

und man kann daher in die Gleichungen für Plancoordinaten die u_k durch die v_k ersetzen. Nun ist v_3 für alle Geraden constant und verschmilzt im Allgemeinen mit den Coefficienten zu endlichen Constanten.

Die Gleichungen in Plancoordinaten gehen demnach in Bezug auf ein System mit einer unendlich fernen Ecke in nicht homogene Gleichungen zwischen den Abschnitten der variabeln Geraden auf den beiden parallelen Axen über.

Bezieht man Gleichungen in Punktcoordinaten auf ein solches System, so verändert sich die Bedingungsgleichung zwischen den drei Coordinaten eines Punktes zu

$$x_1 + x_2 = d,$$

wenn d den senkrechten Abstand der parallelen Axen angiebt.

2. Gleichung der Tangente an einen Punkt x_k' einer Curve $f(x_1 x_2 x_3) = 0$. Gleichung des Tangentialpunktes

in einer enveloppirenden Geraden u_k' einer Curve

$$\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Die Gleichung der Tangente ist die Grenze, welcher sich die Gleichung der Sehne durch die Punkte x_k' und $x_k' + \Delta_k'$ nähert, wenn die Δ_k' verschwinden, d. i. die Grenze von

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ \Delta_1' & \Delta_2' & \Delta_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Für verschwindende Δ_k geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ 1 & \frac{dx_2'}{dx_1'} & \frac{dx_3'}{dx_1'} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet $f_k^{(i)}$ den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x_1 x_2 x_3)}{\partial x_k} \text{ für } x_k = x_k^{(i)},$$

so gelten für die Zeilen dieser Determinante folgende Gleichungen:

$$x_1' f_1' + x_2' f_2' + x_3' f_3' = 0,$$
$$f_1' + \frac{dx_2'}{dx_1'} f_2' + \frac{dx_3'}{dx_1'} f_3' = 0,$$

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta,$$
$$g_1 x_1' + g_2 x_2' + g_3 x_3' = \Delta,$$
$$g' + \frac{dx_2'}{dx_1'} g_2 + \frac{dx_3'}{dx_1'} = 0.$$

Man bilde unter Benutzung von drei willkürlichen Hilfsgrössen die von Null verschiedene Determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix}$$

und multiplicire damit die obige Tangentengleichung. Stellt man das Product linker Hand als eine Determinante dar, so erhält man unter Rücksicht auf die obigen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} (lx_1 + mx_2 + nx_3), & \Delta, & (x_1 f_1' + x_2 f_2' + x_3 f_3') \\ (lx_1' + mx_2' + nx_3'), & \Delta, & 0 \\ \left(l + m\frac{dx_2'}{dx_1'} + n\frac{dx_3'}{dx_1'}\right), & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante reducirt sich auf das Product dreier Diagonalglieder; beseitigt man die beiden constanten Factoren

$$\Delta \text{ und } \quad l + m \frac{dx_2'}{dx_1'} + n \frac{dx_3'}{dx_1'},$$

so bleibt als Gleichung der Tangente an $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ im Punkte x_k':

$$x_1 f_1' + x_2 f_2' + x_3 f_3' = 0.$$

In analoger Weise verfährt man für die Bestimmung der Gleichung des Tangentialpunktes der Curve $\varphi(u_1 u_2 u_3) = 0$ in der Geraden u_k'; sie lautet:

$$u_1 \varphi_1' + u_2 \varphi_2' + u_3 \varphi_3' = 0.$$

3. Die Curven zweiter Ordnung sind zugleich Curven zweiter Classe, und umgekehrt.

Sei die Gleichung einer Curve zweiten Grades

$$f \equiv a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0,$$

so erhält man die Gleichung derselben Curve in Plancoordinaten, wie folgt:

Bezeichnet A einen noch unbestimmten Coefficienten, r den Abstand der Tangente vom Fixpunkte, so ist bekanntlich

$$A r u_1 - f_1' h_1 = 0, \quad A r u_2 - f_2' h_2 = 0, \quad A r u_3 - f_3' h_3 = 0$$

oder

$$f_1' - A r \frac{u_1}{h_1} = 0, \quad f_2' - A r \frac{u_2}{h_2} = 0, \quad f_3' - A r \frac{u_3}{h_3} = 0.$$

Diese drei Gleichungen sind linear nach x_k. Fügt man die Gleichung des Tangentialpunktes in Normalform, geordnet nach x_k', hinzu:

$$\frac{u_1}{h_1} x_1' + \frac{u_2}{h_2} x_2' + \frac{u_3}{h_2} x_3' = 0,$$

so erfordert der Verein dieser vier Gleichungen das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Coordinaten der Tangenten an $f = 0$.

Sei die Gleichung einer Curve zweiter Classe in Plancoordinaten

$$\varphi(u_1 u_2 u_3) \equiv \alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 + 2\alpha_{13} u_1 u_3 + \alpha_{22} u_2^2 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{33} u_3^2 = 0,$$

so erhält man ähnlich wie oben die Gleichung derselben Curve in homogenen Punktcoordinaten.

Aus der Gleichung des Tangentialpunktes in der Tangente u_k'

$$\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 = 0$$

folgt, wenn x_k die Coordinaten des Tangentialpunktes bedeuten:

$$A x_k = \varphi_k' h_k, \quad \varphi' - A \frac{x_k}{h_k} = 0.$$

Nimmt man zu den nach letzter Form gebildeten und nach den u' geordneten drei Gleichungen noch die Gleichung der Tangente in Normalform, geordnet nach u_k', nämlich

$$\frac{r x_1}{h_1} u_1' + \frac{r x_2}{h_2} u_2' + \frac{r x_3}{h_3} u_3' = 0,$$

so erhält man die gewünschte Gleichung in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \frac{x_1}{h_1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \frac{x_2}{h_2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \frac{x_3}{h_3} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Lehrsatz: Liegt der Punkt P' nicht auf der Curve zweiter Ordnung $f = 0$, so ist

$$T \equiv f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 = 0$$

die Gleichung der Polaren von P' in Bezug auf den Kegelschnitt $f = 0$; d. h. legt man ein geradliniges Büschel durch P' als Centrum, so werden P' und derjenige Punkt, in welchem ein Strahl die Gerade T schneidet, von den Schnittpunkten dieses Strahls mit dem Kegelschnitt harmonisch getrennt.

Beweis. Sei P'' ein beliebiger Punkt von T, und seien x_k die Coordinaten eines Punktes, in welchem $P' P''$ die Curve schneidet, so sind λ_1 und λ_2 so zu bestimmen, dass

1) $$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

2) $$x_k = \lambda_1 x_k' + \lambda_2 x_k'',$$

3) $$f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Setzt man in 3) die Werthe für x_k aus 2) ein und ordnet die Glieder nach Potenzen von λ', so erhält man:

$$\lambda'^2(f_1'x_1' + f_2'x_2' + f_3'x_3') + 2\lambda'\lambda''(f_1'x_1'' + f_2'x_2'' + f_3'x_3'') + \lambda''^2(f_1''x_1'' + f_2''x_2'' + f_3''x_3'') = 0.$$

Da P'' auf $T=0$ liegt, so ist der Coefficient von $2\lambda'\lambda''$ gleich Null, und es bleibt demnach zur Bestimmung der λ:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-(f':f'')}.$$

Hiernach erhält man für die beiden Schnittpunkte zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von $\lambda' : \lambda''$, q. e. d.

5. Die Formeln

$$x_1^i f_1^k + x_2^i f_2^k + x_3^i f_3^k \quad \text{und} \quad x_1^k f_1^i + x_2^k f_2^i + x_3^k f_3^i$$

sind identisch. Genügt also ein Punkt P_i der Gleichung der Polaren für P_k, d. i. der Gleichung

$$x_1^i f_1^k + x_2^i f_2^k + x_3^i f_3^k = 0,$$

so genügt auch P_k der Gleichung der Polaren für P_i:

$$x_1^k f_1^i + x_2^k f_2^i + x_3^k f_3^i = 0.$$

Die Polaren der Punkte einer Geraden bilden demnach ein Strahlenbüschel, dessen Träger der Pol der Geraden ist; die Pole der Strahlen eines Büschels liegen auf einer Geraden, der Polaren des Büschelcentrums.

6. Die Polare jedes Punktes ist eindeutig bestimmt, sobald es keinen Punkt giebt, für welchen zugleich

$$f_1' = 0, \quad f_2' = 0, \quad f_3' = 0,$$

d. h. sobald die Discriminante der Gleichung $f = 0$ von Null verschieden ist,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Ist dieselbe gleich Null und sind ihre Minoren von Null verschieden, so zerfällt $f = 0$ in das Product zweier nicht identischer linearer Factoren, der Kegelschnitt degenerirt zu zwei Geraden. Der Schnittpunkt derselben, für welchen $f_1' = f_2' = f_3' = 0$, hat jede beliebige Gerade zur Polaren.

Sind die Minoren gleich Null, so dass also

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{12} : a_{22} : a_{23} = a_{13} : a_{23} : a_{33},$$

so werden die linearen Factoren identisch; jeder Kegelschnitt dege-

nerirt zu einer (doppelt zu denkenden) Geraden. Jeder Punkt derselben hat jede Gerade zur Polaren.

In jedem Falle giebt es wenigstens eine Gerade, die einem gegebenen Punkte als Polare zugeordnet ist.

Die Polare wird unendlich fern für den Punkt, dessen Coordinaten das System lösen:

$$f_1' - kg_1 = 0,$$
$$f_2' - kg_2 = 0,$$
$$f_3' - kg_3 = 0,$$
$$g_1 x_1' + g_2 x_2' + g_3 x_3' = \Delta.$$

Diesem Systeme entsprechen alle Punkte der Ebene nur dann, wenn

$$f = (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3)^2;$$

dann degenerirt der Kegelschnitt zu der unendlich entfernten Geraden.

Dieser Fall bleibt von der folgenden Betrachtung ausgeschlossen. In jedem andern Falle müssen unzählige Punkte existiren, deren Polaren endliche Gerade sind. Diese Punkte können nicht auf einer Linie vertheilt liegen, sondern erfüllen Theile der Ebene continuirlich.

Die Polaren aller Punkte laufen parallel, sobald sich λ und μ so bestimmen lassen, dass für willkürliche Werthe von x_k' und x_k'' das System erfüllt wird:

$$\lambda f_1' + \mu f_1'' - g_1 = 0,$$
$$\lambda f_2' + \mu f_2'' - g_2 = 0,$$
$$\lambda f_3' + \mu f_3'' - g_3 = 0.$$

Hierzu ist nothwendig und ausreichend, dass

$$\begin{vmatrix} f_1' & f_1'' & g_1 \\ f_2' & f_2'' & g_2 \\ f_3' & f_3'' & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich in sechs Glieder auflösen, deren jedes ein Product

$$x_i' x_k'' \quad (i = 1, 2, 3; \; k = 1, 2, 3)$$

mit einer gewissen Determinante multiplicirt enthält.

Die Coefficienten von $x_i' x_i''$ verschwinden identisch. Von den übrigen sind die Coefficienten von $x_i' x_k''$ und $x_k' x_i''$ entgegengesetzt gleich. Hiernach bleiben als Bedingung dafür, dass die fragliche Determinante unabhängig von x_k' und x_k'' verschwindet, die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & g_1 \\ a_{12} & a_{22} & g_2 \\ a_{13} & a_{23} & g_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & g_1 \\ a_{12} & a_{23} & g_2 \\ a_{13} & a_{33} & g_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{23} & a_{33} & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Verein dieser Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante aus den Minoren der Discriminante, mithin das Verschwinden der Discriminante selbst.

Die Function f zerfällt demnach in zwei reelle lineare Factoren. Dieselben seien M und N und mögen die Coefficienten a_k und b_k enthalten; alsdann geht das obige System über in:

$$\begin{aligned} (\lambda M' + \mu M'')b_1 + (\lambda N' + \mu N'')a_1 - g_1 &= 0, \\ (\lambda M' + \mu M'')b_2 + (\lambda N' + \mu N'')a_2 - g_2 &= 0, \\ (\lambda M' + \mu M'')b_3 + (\lambda N' + \mu N'')a_3 - g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Werthe $\lambda M' + \mu M''$, $\lambda N' + \mu N''$ sind constante Factoren; kürzt man sie durch m und n ab, multiplicirt die drei Gleichungen der Reihe nach mit $x_1 x_2 x_3$ und addirt, so erhält man:

$$mN = -nM + (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3).$$

Hieraus folgt (§ 2, 8), dass M und N parallel laufen. Auch dieser Fall, in welchem die Curve zu zwei parallelen Geraden degenerirt, werde vor der Hand von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

7. Jede Gerade kann als Polare mindestens eines Punktes betrachtet werden.

Sei die Gleichung der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

und sei k ein zu bestimmender Factor, so lösen die Coordinaten des gesuchten Pols das System:

$$\begin{aligned} f_1' - ka_1 &= 0, \\ f_2' - ka_2 &= 0, \\ f_3' - ka_3 &= 0, \\ g_1 x_1' + g_2 x_2' + g_3 x_3' &= \Delta. \end{aligned}$$

Dieses System liefert lauter unendliche Werthe von x_k', sobald die Determinante desselben unabhängig von a_k verschwindet. Dies tritt ein, wenn die drei den a_k zugehörigen Minoren von

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & g_3 \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Dieser Fall ist, wie sich mit Hilfe der Sätze über partiale Determinanten adjungirter Systeme leicht nachweisen lässt, mit dem einen in 6) ausgeschlossenen identisch.

8. Für die nach den Ausschlüssen in 6) übrig bleibenden Gebilde lässt sich immer ein Dreieck finden, das ganz im Endlichen liegt und dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken sind; ein solches Dreieck heisst ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Man wähle zu diesem Zwecke einen Punkt P_1, dessen Polare Π_1 im Endlichen liegt; auf dieser einen Punkt P_2, so dass dessen Polare Π_2 mit Π_1 einen Punkt P_3 im Endlichen gemein hat; $P_1 P_2$ ist alsdann Polare für P_3, und $P_1 P_2 P_3$ ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Man transformire die Gleichung des Kegelschnitts auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Da die Polaren der Ecken des Axendreiecks im Allgemeinen die Gleichungen haben:

$$\text{Polare für } A_k\text{: } f'_k = 0,$$

so ist für ein sich selbst conjugirtes Axendreieck:

$$f_1' \equiv a_1 x_1, \quad f_2' \equiv a_2 x_2, \quad f_3' \equiv a_3 x_3,$$

d. i. f erscheint in der Form:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$$

---

9. Lehrsatz: Tangirt eine Gerade T' die Curve zweiter Ordnung $\varphi = 0$ nicht, so ist der Punkt:

$$\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 = 0$$

der Pol der Geraden T', d. h.: die beiden, durch einen Punkt P von T' an $\varphi = 0$ gelegten Tangenten werden durch T' und die Verbindungsgerade des Poles mit P harmonisch getrennt. (Die Identität zwischen den oben und den soeben definirten Begriffen von Pol und Polare wird später nachgewiesen.)

Beweis. Gehe T'' durch den Pol, so dass

$$\varphi_1' u_1'' + \varphi_2' u_2'' + \varphi_3' u_3'' = 0,$$

so haben die beiden fraglichen Tangenten die Coordinaten

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

welche nun der Gleichung $\varphi = 0$ genügen müssen. Substituirt man, so lässt sich das Retultat ordnen zu

$$\lambda^{2\prime} \varphi' + 2 \lambda' \lambda'' (\varphi' u_1'' + \varphi_2' u_2'' + \varphi^{3\prime} u_3'') + \lambda^{2\prime\prime} \varphi'' = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-\varphi'' : \varphi'},$$

q. e. d.

10. Die Formeln

$$\varphi_1{}^i u_1{}^k + \varphi_2{}^i u_2{}^k + \varphi_3{}^i u_3{}^k \text{ und } \varphi_1{}^k u_1{}^i + \varphi_2{}^k u_2{}^i + \varphi_3{}^k u_3{}^i$$

sind identisch. Hieraus folgt:

Die Pole der Geraden eines Büschels erfüllen eine Gerade, die Polare des Büschelcentrums; die Polaren der Punkte einer Geraden bilden ein Büschel, dessen Träger der Pol der Polaren ist.

11. Der Pol einer Geraden ist eindeutig bestimmt, sobald die Discriminante von $\varphi = 0$ nicht verschwindet,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Jedenfalls giebt es immer einen Punkt, welcher einer Geraden als Pol zugehört.

Verschwindet die Discriminante und nicht zugleich alle ihre Minoren, so degenerirt die Curve zu zwei distincten Punkten. Verschwinden auch ihre sämmtlichen Minoren, so degenerirt sie zu zwei zusammenfallenden Punkten. Im ersten Falle hat die Verbindungsgerade der beiden Punkte, im letzten jede durch den einen Punkt gelegte Gerade jeden Punkt der Ebene zum Pol.

Der Pol einer Geraden wird unendlich fern, sobald

$$\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' = 0.$$

Dies ist aber, wenn, wie immer, die Coefficienten der Gleichung $\varphi = 0$ endliche Werthe haben, entweder die Gleichung eines einzelnen Punktes, des Poles der endlich fernen Geraden, oder die Gleichung aller möglichen Punkte. Das Letztere tritt ein, sobald zugleich

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0,$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{23} = 0,$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} = 0.$$

Dieser Fall mag künftig ausgeschlossen bleiben.

12. Einem Punkte ist mindestens eine Gerade als Polare zugeordnet. Sei

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

die Gleichung des Punktes und k ein noch zu bestimmender Factor, so bestimmen sich die Coordinaten u'_k der zugehörigen Polare (resp. Polaren) aus dem System:

$$\begin{aligned}\varphi_1' - k\alpha_1 &= 0,\\ \varphi_2' - k\alpha_2 &= 0,\\ \varphi_3' - k\alpha_3 &= 0,\\ g_1 r_1 u_1' + g_2 r_2 u_2' + g_3 r_3 u_3' &= 2\,\Delta.\end{aligned}$$

Sollen die Polaren aller Punkte unendlich fern sein, so muss dem System unabhängig von α_k durch $u_k' = 1$ genügt werden; dies tritt wiederum nur dann ein, wenn zugleich

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

In dem ausgeschlossenen Falle bleiben in der Gleichung $\varphi = 0$ noch zwei unabhängige Constanten.

Da die Discriminante verschwindet, so zerfällt φ in zwei lineare Factoren; dieselben seien ψ und χ mit den Coefficienten α_k und β_k. Alsdann gehen die Gleichungen

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} = 0$$

über in

$$\begin{aligned}\alpha_1 B + \beta_1 A &= 0,\\ \alpha_2 B + \beta_2 A &= 0,\\ \alpha_3 B + \beta_3 A &= 0.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}A &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\\ B &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.\end{aligned}$$

Diesem Systeme kann nur genügt werden, wenn $A = 0$ und $B = 0$. In diesem Falle degenerirt demnach die Curve zu zwei unendlich entfernten Punkten.

13. In jedem durch 11) nicht ausgeschlossenen Falle kann man immer ein solches ganz im Endlichen gelegenes Dreieck auffinden, dessen Ecken die Pole der Gegenseiten sind. **Ein solches Dreieck heisst ein sich selbst conjugirtes Dreieck.**

Man wähle hierzu eine Gerade T_1, deren Pol P_1 im Endlichen liegt, ferner eine Gerade T_2 durch P_1, welche T_1 schneidet und deren Pol P_2 im Endlichen (auf T_1) liegt; der Pol von $P_1 P_2$ ist alsdann der Schnittpunkt P_3 der Geraden T_2 und T_1. $P_1 P_2 P_3$ ist demnach ein sich selbst conjugirtes Dreieck.

Die Pole der Seiten des Axendreiecks sind im Allgemeinen:

$$\begin{aligned}&\text{Pol von } A_2 A_3: \ \varphi_1' = 0,\\ &\ \ \text{„} \quad \text{„} \quad A_3 A_1: \ \varphi_2' = 0,\\ &\ \ \text{„} \quad \text{„} \quad A_1 A_2: \ \varphi_3' = 0.\end{aligned}$$

Transformirt man die Gleichung der Curve auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck, so muss demnach

$$\varphi_1' \equiv \alpha_1 u_1, \quad \varphi_2' \equiv \alpha_2 u_2, \quad \varphi_3' \equiv \alpha_3 u_3,$$

d. i. die auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck transformirte Gleichung der Curve zweiter Classe lautet:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

14. Stellt man die Gleichungen eines Kegelschnitts, der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck für Punktcoordinaten bezogen ist, in Plancoordinaten dar, so erhält man (§. 4, 3):

$$\frac{g_1^2 u_1^2}{a_1} + \frac{g_2^2 u_2^2}{a_2} + \frac{g_3^2 u_3^2}{a_3} = 0.$$

Stellt man analog die Gleichung eines Kegelschnitts, der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck für Plancoordinaten bezogen ist, in Punktcoordinaten dar, so erhält man (§. 4, 3):

$$\frac{g_1^2 x_1^2}{\alpha_1} + \frac{g_2^2 x_2^2}{\alpha_2} + \frac{g_3^2 x_3^2}{\alpha_3} = 0.$$

Jedes sich selbst conjugirte Dreieck für Punktcoordinaten ist demnach ein ebensolches Dreieck für Plancoordinaten und umgekehrt.

Da man bei der Construction eines sich selbst conjugirten Dreiecks in Punktcoordinaten von einem willkürlichen Punkte, und bei der analogen Construction für Plancoordinaten von einer beliebigen Geraden ausgeht, so folgt hieraus, dass ein Punkt und eine Gerade gleichzeitig für Punkt- und für Plancoordinaten Pol und Polare sind, dass demnach die für denselben Kegelschnitt in Punkt- und in Plancoordinaten definirten Pol und Polare sich auf dieselben Objecte beziehen.

Hieraus folgt weiter, dass alle Curven zweiter Ordnung, für welche ein oder mehr als ein Coefficient unendlich gross wird, sowie die Paare von Parallelen eine Gruppe bilden, welche sich mit derjenigen Gruppe der Curven zweiter Classe deckt, für welche Coefficienten unendlich werden, nebst den unendlich entfernten Punktepaaren.

15. Einige besondere Formen für die Gleichung eines Kegelschnitts.

Gleichung eines Kegelschnitts, der den Punkt A_3 des Axendreiecks enthält:

a) $a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2 a_2 a_3 x_2 x_3 = 0.$

Gleichung eines Kegelschnitts, der die beiden Eckpunkte $A_2 A_3$ des Axendreiecks enthält:

b) $a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0.$

Gleichung eines Kegelschnitts, welcher dem Axendreieck umschrieben ist:

c) $$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0.$$

Gleichung eines Kegelschnitts, welcher eine Seite g_3 des Axendreiecks berührt:

d) $$\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 = 0.$$

Gleichung eines Kegelschnitts, welcher zwei Seiten $g_2\,g_3$ des Axendreiecks tangirt:

e) $$\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{13}u_1u_3 + 2\alpha_{23}u_2u_3 = 0.$$

Gleichung eines Kegelschnitts, welcher dem Axendreieck eingeschrieben ist:

f) $$\alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{13}u_1u_3 + \alpha_{23}u_2u_3 = 0.$$

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher zwei Seiten g_2g_3 des Axendreiecks in den Schnittpunkten derselben mit der dritten Seite (A_3 und A_2) berührt, ist für Punktcoordinaten zunächst von der Form b).

Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten $A_3\,A_2$ sind dieser Gleichung b) gemäss:

$$\text{Tangente in } A_3\text{: } a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0,$$
$$\text{Tangente in } A_2\text{: } a_{12}x_1 + a_{23}x_3 = 0.$$

Erstere Tangente fällt nach der Voraussetzung mit $A_1\,A_3$, d. i. mit $x_2 = 0$ zusammen; folglich ist

$$a_{13} = 0;$$

die andere Tangente ist nach der Voraussetzung $A_1\,A_2$, hat also die Gleichung $x_3 = 0$; folglich ist auch

$$a_{12} = 0.$$

Die gesuchte Gleichung des Kegelschnitts ist also

g) $$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Für jeden Punkt eines Kegelschnitts ist demnach das Product der Abstände von zwei Tangenten dem Quadrate des Abstandes von der Berührungssehne proportional.

Die Gleichung in Plancoordinaten lässt sich für diesen Fall in ganz ähnlicher Weise direct ableiten.

Die Gleichung muss, da die Curve zwei Dreiecksseiten berührt, von der Form e) sein.

Die Gleichungen der Berührungspunkte der tangirenden Seiten sind:

$$\text{Berührungspunkt auf } g_3\text{: } \alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 = 0,$$
$$\text{Berührungspunkt auf } g_2\text{: } \alpha_{12}u_1 + \alpha_{23}u_3 = 0.$$

Da dieselben der Voraussetzung nach mit A_2 und A_3 zusammenfallen, so sind diese Gleichungen mit

$$u_2 = 0, \text{ bez. } u_3 = 0$$

identisch; folglich ist

$$\alpha_{13} = \alpha_{12} = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts ist demnach

h) $$\alpha_{11} u_1^2 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 = 0.$$

Für jede Tangente eines Kegelschnitts ist das Product der Abstände von zwei Curvenpunkten dem Quadrate des Abstands vom Schnittpunkte der Tangenten in den beiden Curvenpunkten proportional.

16. Bestimmung eines Kegelschnitts durch vier Punkte und eine Tangente.

Man beziehe den Kegelschnitt auf das von dreien der gegebenen Punkte gebildete Dreieck. Die Coordinaten des vierten Punkts in Bezug auf dieses Dreieck seien ξ_k, die Coordinaten der gegebenen Geraden u'_k.

Die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts hat für Punktcoordinaten die Form:

a) $$a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 = 0;$$

hieraus ergiebt sich die Gleichung für Plancoordinaten zu:

b) $$a_{12}^2 \frac{u_3^2}{h_3^2} + a_{23}^2 \frac{u_1^2}{h_1^2} + a_{31}^2 \frac{u_2^2}{h_2^2} - 2a_{12}a_{23} \frac{u_1}{h_1} \cdot \frac{u_3}{h_3}$$
$$- 2a_{23}a_{31} \frac{u_2}{h_2} \cdot \frac{u_1}{h_1} - 2a_{31}a_{12} \frac{u_3}{h_3} \cdot \frac{u_2}{h_2} = 0.$$

Damit nun dieser Kegelschnitt den Punkt ξ_k enthalte und die Gerade u'_k berühre, müssen die Coefficienten die beiden Gleichungen erfüllen:

$$a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{31}\xi_3\xi_1 = 0,$$
$$a_{12}^2 \frac{u_3'^2}{h_3^2} + \cdots - 2a_{31}a_{12} \frac{u_3'}{h_3} \cdot \frac{u_2'}{h_2} = 0.$$

Hieraus bestimmt sich das Verhältniss $a_{12} : a_{23} : a_{31}$ und zwar erhält man zwei reelle oder kein reelles Wurzelsystem.

Es giebt demnach zwei oder keinen Kegelschnitt, welcher vier gegebene Punkte enthält und eine gegebene Gerade berührt.

17. Bestimmung eines Kegelschnitts durch drei Punkte und zwei Tangenten.

Man bezieht den Kegelschnitt auf das Dreieck der gegebenen Punkte. Die Coordinaten der beiden gegebenen Tangenten in Bezug auf dieses Dreieck seien u'_k und u''_k. Die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts in Punktcoordinaten sei

$$a_{12} x_{12} x_2 + a_{13} x_2 x_3 + a_{23} x_2 x_3 = 0,$$

so ist die Gleichung in Plancoordinaten

$$a_{12}^2 \frac{u_3^2}{h_3^2} + \cdots - 2 a_{31} a_{12} \frac{u_3}{h_3} \cdot \frac{u_2}{h_2} = 0.$$

Da die beiden Tangenten u'_k und u''_k den Kegelschnitt berühren, so bestimmen sich demnach die Verhältnisse der Coefficienten aus den beiden Gleichungen:

$$a_{12}^2 \frac{u_3'^2}{h_3^2} + \cdots - 2 a_{31} a_{12} \frac{u_3'}{h_3} \cdot \frac{u_2'}{h_2} = 0,$$

$$a_{12}^2 \frac{u_3''}{h_3^2} + \cdots - 2 a_{31} a_{12} \frac{u_3''}{h_3} \cdot \frac{u_2''}{h_2} = 0.$$

Diese Gleichungen lehren:

Es giebt vier, zwei oder keinen Kegelschnitt, welcher drei gegebene Punkte enthält und zwei gegebene Gerade berührt.

18. Bestimmung eines Kegelschnitts durch vier Tangenten und einen Punkt.

Man beziehe die Gleichung des Kegelschnitts in Plancoordinaten auf das von dreien der gegebenen Tangenten gebildete Dreieck. Die Coordinaten der vierten Tangente in Bezug auf dieses Dreieck seien u'_k, die Coordinaten des gegebenen Punktes ξ_k.

Die Gleichung des Kegelschnitts in Plancoordinaten lautet:

a) $$\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{31} u_3 u_1 = 0;$$

woraus sich die Gleichung für Punktcoordinaten ergiebt:

b) $$\alpha_{12}^2 \frac{x_3^2}{h_3^2} + \alpha_{23}^2 \frac{x_1^2}{h_1^2} + \alpha_{31}^2 \frac{x_2^2}{h_2^2} - 2 \alpha_{12} \alpha_{23} \frac{x_1}{h_1} \cdot \frac{x_3}{h_3}$$
$$- 2 \alpha_{23} \alpha_{31} \frac{x_2}{h_2} \cdot \frac{x_1}{h_1} - \alpha_{31} \alpha_{12} \frac{x_3}{h_3} \cdot \frac{x_2}{h_2} = 0.$$

Da der Kegelschnitt die Gerade u'_k berührt und den Punkt ξ_k enthält, so erfüllen u'_k und ξ'_k die Gleichungen a) und b):

$$\alpha_{12} u_1' u_2' + \alpha_{23} u_2' u_3' + \alpha_{31} u_3' u_1' = 0,$$

$$\alpha_{12}^2 \frac{\xi_3^2}{h_3} + \cdots - 2 \alpha_{31} \alpha_{12} \frac{\xi_3}{h_3} \cdot \frac{\xi_2}{h_2} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich das gesuchte Verhältniss der Coefficienten $\alpha_{12} : \alpha_{13} : \alpha_{31}$. Man findet:

Es giebt zwei oder keinen Kegelschnitt, welcher vier gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Punkt enthält.

19. Bestimmung eines Kegelschnittes durch drei Tangenten und zwei Punkte.

Auf das Dreieck der drei Tangenten bezogen, lautet die Gleichung des Kegelschnitts in Plancoordinaten:

$$\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{31} u_3 u_1 = 0;$$

mithin die Gleichung in Punktcoordinaten:

$$\alpha_{12}^2 \frac{x_3^2}{h_3^2} + \cdots - 2\,\alpha_{31}\alpha_{12} \frac{x_3}{h_3} \cdot \frac{x_2}{h_2} = 0.$$

Sind $x_k' x_k''$ die Coordinaten der beiden Punkte in Bezug auf das gewählte Dreieck, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten α_{ik} die beiden Gleichungen:

$$\alpha_{12}^2 \frac{x_3'^2}{h_3^2} + \cdots - 2\,\alpha_{31}\alpha_{12} \frac{x_3'}{h_3} \cdot \frac{x_2'}{h_2} = 0,$$

$$\alpha_{12}^2 \frac{x_3''}{h_3^2} + \cdots - 2\,\alpha_{31}\alpha_{12} \frac{x_3''}{h_3} \cdot \frac{x_2''}{h_2} = 0.$$

Es giebt demnach vier, zwei oder keinen Kegelschnitt, welcher drei gegebene Gerade berührt und zwei gegebene Punkte enthält.

20. Bestimmung des Kegelschnitts, der drei gegebene Punkte enthält und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, sowie des Kegelschnitts, der drei gegebene Gerade und eine vierte Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Für den ersten Fall beziehe man den Kegelschnitt auf das Dreieck der drei gegebenen Punkte, so dass die Gleichung ist:

a) $$a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Sei die Gleichung der gegebenen Tangente

b) $$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

und ξ_k die Coordinaten des auf ihr gegebenen Punktes, so erfüllen die a_{ik} die Gleichung:

c) $$a_{12} \xi_1 \xi_2 + a_{23} \xi_2 \xi_3 + a_{31} \xi_3 \xi_1 = 0.$$

Die Gleichung der im Punkte ξ_k an den Kegelschnitt gelegten Tangente ist

d) $$(a_{12}\xi_2 + a_{31}\xi_3) x_1 + (a_{12}\xi_1 + a_{23}\xi_3) x_2 + (a_{23}\xi_2 + a_{31}\xi_1) x_3 = 0.$$

Da dieselbe mit b) geometrisch identisch ist, so ergeben sich folgende Gleichungen, wenn k eine beliebige Zahl bezeichnet:

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} a_{12}\xi_2 + a_{31}\xi_3 &= kA_1,\\ a_{12}\xi_1 + a_{23}\xi_3 &= kA_2,\\ a_{23}\xi_2 + a_{31}\xi_1 &= kA_3. \end{aligned}$$

Das System e), aus welchem sich das Verhältniss der a_{ik} bereits bestimmt, ist mit c) nicht im Widerspruche. Denn multiplicirt man die Gleichungen e) der Reihe nach mit $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ und addirt, so erhält man:

$$2(a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{23}\xi_2\xi_3 + a_{31}\xi_1\xi_1) = k(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3).$$

Da nun ξ_k auf der Geraden b) liegt, so ist die rechte Seite gleich Null, d. h. der Kegelschnitt, der die aus e) bestimmten Coefficienten hat, enthält zugleich den Punkt ξ_k.

Da das System e) die gesuchten Coefficienten (bis auf den gemeinsamen Factor k) eindeutig bestimmt, so folgt:

Es giebt stets und nur einen Kegelschnitt, welcher drei gegebene Punkte enthält, und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Aehnlich verläuft die Untersuchung über den zweiten Fall. Man beziehe den Kegelschnitt auf das Dreieck der drei ersteren Tangenten. Dann ist die Gleichung

$$\text{f)}\quad \alpha_{12}u_1u_2 + \alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{31}u_3u_1 = 0.$$

Der vierte Punkt habe die Gleichung

$$\text{g)}\quad A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 = 0;$$

die Coordinaten der ihn enthaltenden gegebenen Tangente seien u_k'.

Die Gleichung des Tangentialpunktes dieser Tangente ist:

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} (\alpha_{12}u_2' + \alpha_{31}u_3')u_1 + (\alpha_{12}u_1' + \alpha_{23}u_3')u_2&\\ + (\alpha_{23}u_2' + \alpha_{31}u_1')u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da dieselbe mit g) identisch sein soll, so ergeben sich zur Bestimmung der α_{ik} die drei Gleichungen:

$$\text{i)}\quad \begin{aligned} \alpha_{12}u_2' + \alpha_{31}u_3' &= kA_1\\ \alpha_{12}u_1' + \alpha_{23}u_3' &= kA_2\\ \alpha_{23}u_2' + \alpha_{31}u_1' &= kA_3. \end{aligned}$$

Dieselben sind nicht im Widerspruche mit der überzähligen Bedingung, dass u_k' die Gleichung f) erfüllen soll; denn mit $u_1'u_2'u_3'$ multiplicirt und addirt, wird die linke Seite mit f) für $u_k = u_k'$ identisch, die linke Seite mit g) für $u_k = u_k'$; da nun g) nach der Voraussetzung verschwindet, so verschwindet demnach auch

$$\alpha_{12}u_1'u_2' + \cdots$$

Aus i) ergeben sich eindeutige Werthe für die Verhältnisse der Coefficienten.

Durch vier Tangenten und den Tangentialpunkt in einer derselben ist demnach ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

21. Die eben beendete Untersuchung enthält zugleich alle Gleichungen zur Lösung der beiden Probleme:

Einen Kegelschnitt zu bestimmen, der drei gegebene Punkte enthält oder drei gegebene Gerade berührt und für welchen eine gegebene Gerade und ein gegebener Punkt Pol und Polare sind.

Denn bezieht man zur Lösung des ersten Problems den Kegelschnitt auf das Dreieck der gegebenen Kegelschnittpunkte, und sind in Bezug auf dieses Dreieck ξ_k Coordinaten des vierten Punktes und ist

$$\text{k)} \qquad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0,$$

die Gleichung seiner gegebenen Polaren, so sind demnach die Coefficienten a_{ik} der Gleichung des Kegelschnitts so zu bestimmen, dass die aus der Kegelschnittsgleichung folgende Polare von ξ_k mit der gegebenen identisch ist, d. h. es muss

$$(a_{12}\xi_2 + a_{31}\xi_3)x_1 + (a_{23}\xi_3 + a_{12}\xi_1)x_2 + (a_{31}\xi_1 + a_{23}\xi_2)x_3 = 0$$

mit k) identisch sein. Hieraus folgen, mit Benutzung eines willkürlichen Zahlenfactors k, die für die Bestimmung des Verhältnisses der a_{ik} ausreichenden Gleichungen:

$$\text{l)} \qquad \begin{aligned} a_{12}\xi_2 + a_{31}\xi_3 &= k A_1, \\ a_{23}\xi_3 + a_{12}\xi_1 &= k A_2, \\ a_{31}\xi_1 + a_{23}\xi &= k A_3. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind der Form nach mit den Lösungen von e) identisch; nur dass die ξ_k die Gleichung des Kegelschnitts und die der Polaren nicht erfüllen.

Ein Kegelschnitt ist demnach eindeutig bestimmt, wenn drei seiner Punkte und die Polare eines vierten Punktes der Ebene gegeben sind.

Um das zweite Problem zu lösen, bilde man die Gleichung des Kegelschnitts in Bezug auf das Dreieck der drei gegebenen Tangenten. Die vierte Gerade habe die Coordinaten u'_k, ihr gegebener Pol die Gleichung

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 = 0.$$

Diese Gleichung muss mit der aus der Kegelschnittsgleichung hergeleiteten Gleichung des Poles von u'_k übereinstimmen; hieraus ergeben sich zur Bestimmung der Constanten α_{ik} des Kegelschnitts die ausreichenden Gleichungen:

$$\text{m)}\quad \begin{aligned} \alpha_{12}u_2' + \alpha_{31}u_3' &= kA_1, \\ \alpha_{13}u_3' + \alpha_{12}u_1' &= kA_2, \\ \alpha_{31}u_1' + \alpha_{23}u_2' &= kA_3, \end{aligned}$$

der Form nach identisch mit i), nur haben die u_k' eine andere Bedeutung für den Kegelschnitt. Sie lehren:

Ein Kegelschnitt ist eindeutig bestimmt, wenn drei seiner Tangenten und der Pol einer vierten Geraden gegeben sind.

22. Durch zwei Tangenten, den Berührungspunkten auf denselben und noch einen Punkt, oder noch eine Tangente ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

Man beziehe den Kegelschnitt auf das von den Tangenten und der Berührungssehne gebildete Dreieck. Die Gleichung desselben ist alsdann:

in Punktcoordinaten: $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$,
in Plancoordinaten: $\alpha_{11}u_1^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 = 0$.

Sind ξ_k die Coordinaten des noch überdies gegebenen Punktes, bez. u_k' die der gegebenen Tangente, so werden die Coefficienten der Gleichungen aus den beiden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 &= 0, \\ \alpha_{11}u_1'^2 + 2\alpha_{22}u_2'u_3' &= 0. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen lehren die Richtigkeit der obigen Behauptung.

23. Durch zwei Paar Pol und Polare und noch einen Punkt oder noch eine Tangente ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt.

Bezieht man den Kegelschnitt auf ein Dreieck, welches den einen Pol und seine Polare als Ecke und Gegenseite enthält, so wird die Gleichung

in Punktcoordinaten:

$$\text{a)}\quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

in Plancoordinaten:

$$\text{b)}\quad \alpha_{11}u_1^2 + \alpha_{22}u_2^2 + 2\alpha_{23}u_2u_3 + \alpha_{33}u_3^2 = 0.$$

Die Coordinaten des andern gegebenen Poles seien x_k', die Gleichung seiner Polaren:

$$\text{c)}\quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0;$$

die Coordinaten des überdies gegebenen Punktes seien x_k''.

Die aus a) folgende Gleichung der Polaren von P' ist

$$\text{d)}\quad a_{11}x_1'x_1 + (a_{22}x_2' + a_{23}x_3')x_2 + (a_{23}x_2' + a_{33}x_3')x_3 = 0.$$

Aus der Identität mit c) folgt das System:

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1' \qquad\qquad &= kA_1, \\ a_{22}x_2' + a_{23}x_3' &= kA_2, \\ a_{23}x_2' + a_{33}x_3' &= kA_3. \end{aligned}$$

Da P'' auf a) gelegen ist, so erfüllen die a_{ik} noch die Gleichung

$$\text{f)}\quad a_{11}x_1''^2 + a_{22}x_2''^2 + 2a_{23}x_2''x_3'' + a_{33}x_3''^2 = 0.$$

Berechnet man a_{11} aus f) und substituirt dies in e), so erhält man drei lineare Gleichungen für die übrigen Coefficienten, woraus sich für dieselben drei mit dem gemeinsamen Factor k behaftete Werthe ergeben. Mit Hülfe dieser Lösungen folgt dann aus der ersten Substitution der Werth a_{11}, ebenfalls mit dem Factor k behaftet, so dass sich das Verhältniss der Coefficienten aus dem obigen System eindeutig bestimmt.

Für das zweite Problem seien die Coordinaten der gegebenen Polaren u_k'; die Gleichung ihres Poles sei

$$\text{g)}\quad A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 = 0;$$

die Coordinaten der noch ausserdem gegebenen Tangente seien u_k''.

Dann erhält man zur Bestimmung der a_{ik} ganz wie oben das System:

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} &\alpha_{11}u_1' = kA_1, \\ &\alpha_{22}u_2' + \alpha_{23}u_3' = kA_2, \\ &\alpha_{23}u_2' + \alpha_{33}u_3' = kA_3, \\ &\alpha_{11}u_1''^2 + \alpha_{22}u_2''^2 + 2\alpha_{23}u_2''u_3'' + \alpha_{33}u_3''^2 = 0, \end{aligned}$$

aus dem sich das Verhältniss der Constanten α_{ik} eindeutig bestimmt, q. e. d.

---

24. Eintheilung der Gebilde zweiter Ordnung nach den Formen der auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezogenen Gleichungen in Punkt- oder Plancoordinaten.

Die Gleichung sei

in Punktcoordinaten: $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$,
in Plancoordinaten: $\alpha_1u_1^2 + \alpha_2u_2^2 + \alpha_3u_3^2 = 0$.

A. Zwei oder ein Coefficient in einer oder der andern Gleichung sind gleich Null:

1.

A. $a_2 = 0,\ a_3 = 0,$ also $\alpha_2 = \infty,\ \alpha_3 = \infty.$

Die Gleichung wird

$$a_1x_1^2 = 0$$

in Punktcoordinaten; für Plancoordinaten löst sie sich in die Bedingungen auf:

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

bedeutet also eine (doppelt zu denkende) Gerade. —

B. $\alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad$ also $a_2 = \infty, \quad a_3 = \infty;$

Gleichung in Plancoordinaten:

$$\alpha_1 u_1^2 = 0;$$

in Punktcoordinaten löst sie sich auf zu

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

bedeutet demnach einen (doppelt zu denkenden) Punkt. —

2.

A. $a_3 = 0, \quad a_1 : a_2 > 0, \quad$ also $\alpha_3 = \infty, \quad \alpha_1 : \alpha_2 > 0.$

Gleichung in Punktcoordinaten: $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0,$

" " Plancoordinaten: $u_3^2 = 0.$

Der erstern kann durch reelle Punkte nur genügt werden, wenn zugleich

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet demnach einen Punkt. —

B. $\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 : \alpha_2 > 0, \quad$ also $a_3 = \infty, \quad a_1 : a_2 > 0.$

Gleichung in Plancoordinaten: $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0,$

" " Punktcoordinaten: $x_3^2 = 0.$

Der ersten Gleichung entspricht nur eine reelle Gerade, nämlich:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \text{d. i. } x_3 = 0. \text{ —}$$

3.

A. $a_3 = 0, \quad a_1 : a_2 < 0, \quad$ also $\alpha_3 = \infty, \quad \alpha_1 : \alpha_2 < 0.$

Gleichung in Punktcoordinaten: $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0,$

" " Plancoordinaten: $u_3 = 0, \quad \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0.$

Die erstere Gleichung zerfällt in das Product zweier reellen linearen Factoren von der Form

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)(b_1 x_1 - b_2 x_2) = 0.$$

Die zweiten Bedingungen lehren dasselbe, denn aus

$$g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 = \Delta$$

und

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0$$

bestimmen sich zwei reelle Werthpaare u_1 und u_2, welche entgegengesetzt gleiche Verhältnisse haben.

Hiernach bedeutet die Gleichung in dieser Form zwei sich schneidende Geraden; dieselben bilden mit den Axen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein harmonisches Büschel.. —

B. $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 : \alpha_2 < 0$, also $a_3 = \infty$, $a_1 : a_2 < 0$.

Gleichung in Plancoordinaten: $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0$,

" " Punktcoordinaten: $x_3 = 0$, $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0$.

Die erste Gleichung zerfällt in zwei reelle Factoren:

$$(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2)(\beta_1 u_1 - \beta_2 u_2) = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0$$

und

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 = 2\varDelta$$

bestimmen sich zwei reelle Werthpaare von x_1 und x_2, welche entgegengesetzt gleiche Verhältnisse haben.

Die Gleichungen bedeuten demnach zwei auf $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ (also auf $x_3 = 0$) gelegene Punkte, welche von A_1 und A_2 harmonisch getrennt werden.

25. **B.** Keiner der Coefficienten ist Null oder unendlich gross.

Die weitere Unterscheidung erfolgt in Rücksicht auf den Punkt, dessen Polare unendlich fern ist, und auf die Geraden, deren Pole unendlich fern sind.

1. Der Pol, dessen Polare unendlich fern ist, ist selbst unendlich fern, sobald (11):

$$\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes ist; für

$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2$$

reducirt sich diese Bedingung auf

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0;$$

ist $\varphi = 0$ in der allgemeinen Form gegeben, so liefert sie

$$\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} + \alpha_{22} + 2\alpha_{23} + \alpha_{22} = 0.$$

Beide Formen zeigen an, dass $\varphi = 0$ erfüllt wird für

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1;$$

die Curve wird also von der unendlich fernen Geraden tangirt.

Für Punktcoordinaten lässt sich die angegebene Bedingung ausdrücken wie folgt:

$$\frac{g_1^2}{a_1} + \frac{g_2^2}{a_2} + \frac{g_3^2}{a_3} = 0.$$

26. 2. **Der Pol der unendlich fernen Geraden — das Centrum der Curve — ist ein im Endlichen gelegener Punkt.**

Wir setzen, ohne die Allgemeinheit zu stören, voraus, dass in den beiden Gleichungen ein und desselben Kegelschnitts

$$\alpha_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \quad \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0,$$

wo also

$$\alpha_k \,.\, a_k = g_k^2,$$

die Coefficienten folgende Vorzeichen haben:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0,$$

also auch

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 < 0.$$

Das Trägheitsgesetz für quadratische Formen lehrt, dass bei der Transformation der Gleichungen von einem sich selbst conjugirten Dreieck auf ein anderes die Anzahl der positiven Coefficienten unverändert bleibt.

27. **Lehrsatz. Transformirt man die Gleichungen eines Kegelschnitts von einem sich selbst conjugirten Dreieck zu einem andern, ohne die Gleichungen durch constante Factoren zu kürzen oder zu erweitern, so ist die Summe der Coefficienten in beiden Gleichungen unveränderlich.**

Beweis. Die beiden sich selbst conjugirten Dreiecke seien $A_1 A_2 A_3$ und $A_1' A_2' A_3'$. Die Coordinaten im neuen Systeme seien für Punkte X_k, für Geraden U_k, im alten Systeme x_k und u_k; die Gleichungen der Curve im neuen Systeme seien

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0, \quad \alpha_1 U_1^2 + \alpha_2 U_2^2 + \alpha_3 U_3^2 = 0.$$

Wendet man die in §. 3, 3 gebrauchten Bezeichnungen an, so erhält man als Bedingung dafür, dass $A_1 A_2 A_3$ ein sich selbst conjugirtes Dreieck ist, die beiden Systeme von je drei Gleichungen:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} a_1 a_i' a_k' + a_2 a_i'' a_k'' + a_3 a_i''' a_k''' &= 0 \\ \alpha_1 \alpha_i' \alpha_k' + \alpha_2 \alpha_i'' \alpha_k'' + \alpha_3 \alpha_i''' \alpha_k''' &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &i, k = 1, 2 \text{ oder} \\ &2, 3 \text{ oder } 3, 1. \end{aligned}$$

Da die Transformationsformeln auf der rechten Seite Geraden- und Punktgleichungen in Normalform enthalten, so erfüllen die Coefficienten noch die zwei Gruppen von je drei Gleichungen:

$$2)\quad \begin{gathered} a_1^{i2} + a_2^{i2} + a_3^{i2} - 2 a_1^i a_2^i \cos\gamma_3 - 2 a_2^i a_3^i \cos\gamma_1 - 2 a_3^i a_1^i \cos\gamma_2 = 1, \\ \alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i = 1, \\ i = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Die Summen der Coefficienten in den transformirten Gleichungen werden zu

$$a_1(a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) + a_2(a_1''^2 + a_2''^2 + a_3''^2) + a_3(a_1'''^2 + a_2'''^2 + a_3'''^2),$$

3) und

$$\alpha_1(\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) + \alpha_2(\alpha_1''^2 + \alpha_2''^2 + \alpha_3''^2) + \alpha_3(\alpha_1'''^2 + \alpha_2'''^2 + \alpha_3'''^2).$$

Berechnet man aus der ersten Gruppe von 2) die Trinome

$$a_1^{i2} + a_2^{i2} + a_3^{i2}$$

und substituirt in die erste Formel 3), so erhält man unter Berücksichtigung des ersten Systemes 1) die Constanz der Coefficientensumme in der Gleichung des Kegelschnitts für Punktcoordinaten.

Die zweite der Formeln 3) lässt sich in Rücksicht auf das zweite System 1) schreiben:

$$\alpha_1(\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')^2 + \alpha_2(\alpha_1'' + \alpha_2'' + \alpha_3'')^2 + \alpha_3(\alpha_1''' + \alpha_2''' + \alpha_3''')^2.$$

Nimmt man hierzu das zweite System 2), so erhält man die Constanz der Summe der Coefficienten in der Gleichung für Plancoordinaten.

28. Die Gleichung des Centrums ist (16):

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Seine Coordinaten sind demnach

$$x_k = \frac{\alpha_k h_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Da nun der Nenner dieses Ausdrucks für alle sich selbst conjugirten Dreiecke beständig bleibt, ferner auch die Zahl der positiven α_k sich nicht ändert, so zerfallen die centralen Kegelschnitte in zwei Gruppen: in der einen Gruppe liegt in Bezug auf alle sich selbst conjugirten Dreiecke das Centrum in einem der drei unbegrenzten äusseren Winkelfelder des Axendreiecks; in der andern Gruppe liegt er in einem der drei Felder, welche durch eine Axe und die Verlängerungen der beiden anderen begrenzt werden.

Bezeichnet man mit c_k die Coordinaten des Centrums, so lassen sich die Gleichungen eines Kegelschnittes demnach auf die Formen bringen:

$$\frac{g_1^2 h_1}{c_1} x_1^2 + \frac{g_2^2 h_2}{c_2} x_2^2 + \frac{g_3^2 h_3}{c_3} x_3^2 = 0$$

und

$$\frac{c_1}{h_1} u_1^2 + \frac{c_2}{h_2} u_2^2 + \frac{c_3}{h_3} u_3^2 = 0;$$

die so reducirten Gleichungen gehen bei der Transformation für andere sich selbst conjugirte Dreiecke ohne Aufnahme von Erweiterungscoefficienten in Gleichungen derselben Form in Bezug auf das neue System über.

Lässt man nun das Centrum mit A_3 zusammenfallen, so bleibt bei der ersten Gruppe das Verhältniss der (verschwindenden) Coordinaten $c_1 : c_2$ positiv; die Gleichung gewinnt demnach die Form

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 = 1.$$

Bei der zweiten Gruppe bleibt das Verhältniss $c_1 : c_2$ negativ und die Gleichung erhält die Form

$$a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2 = 1.$$

Die Kriterien in (17) und (19) bestimmen die Curve als Parabel, Ellipse oder Hyperbel.

Rückt A_3 ins Unendliche, so geht $A_1 A_2$ durchs Centrum, wird Diameter. Bei der Ellipse liegt das Centrum auf derselben Seite von A_1 und A_2, bei der Hyperbel werden A_1 und A_2 durchs Centrum getrennt. Im ersten Falle haben c_1 und c_2 entgegengesetzte, im letzten Falle gleiche (positive) Vorzeichen.

Die Gleichung für Plancoordinaten nimmt hiernach die Formen an:

$$\text{für Ellipse: } \alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 = 1,$$
$$\text{für Hyperbel: } \alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 = 1.$$

---

29. **Untersuchung über Asymptoten eines Kegelschnitts.** Man wähle ein für den Kegelschnitt sich selbst conjugirtes Dreieck zum Axendreieck. Die Kegelschnittsgleichung sei:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

Soll nun eine Gerade u_k' Asymptote des Kegelschnitts, d. i. Tangente mit unendlich fernem Tangentialpunkte sein, so erfüllen die u_k' die Gleichung

a) $$\alpha_1 u_1'^2 + \alpha_2 u_2'^2 + \alpha_3 u_3'^2 = 0.$$

Der auf der Geraden u_k' liegende Tangentialpunkt hat die Gleichung:

$$\alpha_1 u_1' u_1 + \alpha_2 u_2' u_2 + \alpha_3 u_3' u_3 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass dieser Punkt unendlich ist, lautet:

b) $$\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' = 0.$$

Dies ist eine zweite Gleichung der Coordinaten der Asymptote. Aus a) und b) wird das Verhältniss der Coordinaten bestimmt.

Eine Curve zweiten Grades wird nun Asymptoten haben oder nicht, je nachdem dieses System reelle Lösungen für das Verhältniss der u_k' liefert, oder complexe.

Um hierüber zu entscheiden, eliminire u_3 aus b) und a). Man erhält:

c) $$u_1'^2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_1^2) + u_2'^2(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_2^2) + 2\alpha_1\alpha_2 u_1' u_2' = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist:

d) $$\alpha_1^2\alpha_2^2 - (\alpha_3 + \alpha_1)(\alpha_3 + \alpha_2)\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Ist die Summe der Coefficienten $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ positiv, so folgt, dass die Discriminante positiv oder negativ ist, je nachdem ein Coefficient oder zwei negativ sind. Die Hyperbel hat hiernach zwei reelle Asymptoten, die Ellipse keine.

Die Discriminante verschwindet, wenn die Summe der Coefficienten verschwindet. In diesem Falle wird der Bedingungsgleichung b) genügt durch

$$u_1' = u_2' = u_3' = 1.$$

Da es dann nur eine Asymptote giebt, so ist demnach diese unendlich ferne Gerade zugleich Asymptote.

Die Parabel wird demnach von der unendlich fernen Geraden berührt.

---

30. Die Bedingung dafür, dass zwei Dreiecke für einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind, lässt sich wie folgt ausdrücken:

Es seien $x_k' x_k'' x_k'''$ die Coordinaten der Ecken, $u_k' u_k'' u_k'''$ die der Seiten des einen Dreiecks in Bezug auf das andere. Der beiden Dreiecken zugehörige Kegelschnitt habe für das zum Axendreieck gewählte Dreieck die Gleichungen:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0,$$

oder

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

Dann ist nothwendig und ausreichend, dass die Polare von x_k' durch x_k'' und x_k''', und die von x_k'' durch x_k''' geht; es muss demnach das System gelten:

$$\begin{aligned} a_1 x_1' x_1'' + a_2 x_2' x_2'' + a_3 x_3' x_3'' &= 0, \\ a_1 x_1' x_1''' + a_2 x_2' x_2''' + a_3 x_3' x_3''' &= 0, \\ a_1 x_1'' x_1''' + a_2 x_2'' x_2''' + a_3 x_3'' x_3''' &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man die gesuchte Bedingung in Form einer verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1' x_1'' & x_2' x_2'' & x_3' x_3'' \\ x_1'' x_1''' & x_2'' x_2''' & x_3'' x_3''' \\ x_1''' x_1' & x_2''' x_2' & x_3''' x_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Aehnlich findet man die gleichwerthige Bedingung:

$$\begin{vmatrix} u_1' u_1'' & u_2' u_2'' & u_3' u_3'' \\ u_1'' u_1''' & u_2'' u_2''' & u_3'' u_3''' \\ u_1''' u_1' & u_2''' u_2' & u_3''' u_3' \end{vmatrix} = 0.$$

31. Lehrsatz: Sind zwei Dreiecke für einen Kegelschnitt sich selbst conjugirt, so sind sie beide einem Kegelschnitte eingeschrieben und einem Kegelschnitte umschrieben.

Jeder dem Axendreieck umschriebene oder eingeschriebene Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 = 0,$$

beziehentlich

$$\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{31} u_3 u_1 = 0.$$

Sollen $x_k' x_k'' x_k'''$ (30) in einem solchen Kegelschnitt liegen, beziehentlich $u_k' u_k'' u_k'''$ einen solchen Kegelschnitt berühren, so muss das System erfüllt sein:

$$\begin{aligned} a_{12} x_1' x_2' + a_{23} x_2' x_3' + a_{31} x_3' x_1 &= 0, \\ a_{12} x_1'' x_2'' + a_{23} x_2'' x_3'' + a_{31} x_3'' x_1'' &= 0, \\ a_{12} x_1''' x_2''' + a_{23} x_2''' x_3''' + a_{31} x_3''' x_1''' &= 0, \end{aligned}$$

beziehentlich

$$\begin{aligned} \alpha_{12} u_1' u_2' + \alpha_{23} u_2' u_3' + \alpha_{31} u_3' u_1' &= 0, \\ \alpha_{12} u_1'' u_2'' + \alpha_{23} u_2'' u_3'' + \alpha_{31} u_3'' u_1'' &= 0, \\ \alpha_{12} u_1''' u_2''' + \alpha_{23} u_2''' u_3''' + \alpha_{31} u_3''' u_1''' &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, dass drei Punkte in einem um das Axendreieck beschriebenen Kegelschnitt liegen, beziehentlich dafür, dass drei Gerade einen dem Axendreieck eingeschriebenen Kegelschnitt berühren, das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1' x_2' & x_2' x_3' & x_3' x_1' \\ x_1'' x_2'' & x_2'' x_3'' & x_3'' x_1'' \\ x_1''' x_2''' & x_2''' x_3''' & x_3''' x_1''' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1' u_2' & u_2' u_3' & u_3' u_1' \\ u_1'' u_2'' & u_2'' u_3'' & u_3'' u_1'' \\ u_1''' u_2''' & u_2''' u_3''' & u_3''' u_1''' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese beiden Determinanten sind Glied für Glied den unter (21) angeführten gleich, wie sich leicht nachweisen lässt.

32. Lehrsatz: Gruppirt man sechs Punkte eines Kegelschnitts zu zwei Dreiecken, so lässt sich stets ein und nur ein Kegelschnitt finden, für welchen beide Dreiecke sich selbst conjugirt sind. Gruppirt man sechs Tangenten eines Kegelschnittes zu zwei Dreiecken, so lässt sich stets ein und nur ein Kegelschnitt finden, für welchen beide Dreiecke sich selbst conjugirt sind.

Beweis: Zum Beweise des ersten Theiles beziehe man die drei Punkte der einen Gruppe $x'_k x''_k x'''_k$ auf das aus den Punkten der andern gebildete Dreieck; dann annulliren die $x'_k x''_k x'''_k$ die erste Determinante in (21), mithin auch die erste Determinante in (20).

Gesetzt, es sei

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

die Gleichung des beiden Dreiecken conjugirten Kegelschnittes, so müssen (21) die Gleichungen erfüllt werden:

$$a_1 x_1' x_1'' + a_2 x_2' x_2'' + a_3 x_3' x_3'' = 0,$$
$$a_1 x_1'' x_1''' + a_2 x_2'' x_2''' + a_3 x_3'' x_3''' = 0,$$
$$a_1 x_1''' x_1' + a_2 x_2''' x_2' + a_3 x_3''' x_3' = 0.$$

Dieses System ist erfüllbar, da die Determinante verschwindet; aus irgend zweien der drei Gleichungen folgt dann das Verhältniss

$$a_1 : a_2 : a_3$$

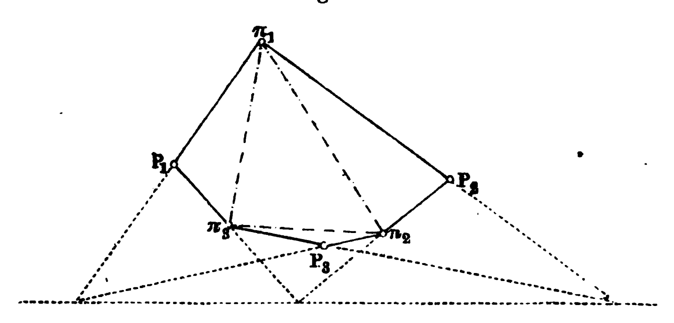
eindeutig, q. e. d.

Ebenso erfolgt der Beweis des zweiten Theiles.

33. Beweis des Pascal'schen Satzes.

Liegen die drei Punkte, in welchen sich die gegenüberliegenden Seitenpaare eines Sechsecks schneiden, in

Fig. 9.



einer Geraden, so ist das Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben (Fig. 9).

Das Sechseck sei $P_1 \Pi_1 P_2 \Pi_2 P_3 \Pi_3$; seine Gegenseitenpaare sind alsdann:

$$P_1 \Pi_1 \text{ und } \Pi_2 P_3,$$
$$\Pi_1 P_2 \text{ und } P_3 \Pi_3,$$
$$P_2 \Pi_2 \text{ und } \Pi_3 P_1.$$

Man beziehe $P_1 P_2 P_3$ auf das Axendreieck $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$; haben dann $P_1 P_2 P_3$ die Coordinaten x_k', x_k'', x_k''', so sind die Gleichungen der Seiten des Sechsecks:

$$\begin{aligned}
(P_1 \Pi_1) &\equiv x_3' x_2 - x_2' x_3 = 0, & (\Pi_2 P_3) &\equiv x_3''' x_1 - x_1''' x_3 = 0,\\
(\Pi_1 P_2) &\equiv x_3'' x_2 - x_2'' x_3 = 0, & (P_3 \Pi_3) &\equiv x_2''' x_1 - x_1''' x_2 = 0,\\
(P_2 \Pi_2) &\equiv x_1'' x_3 - x_3'' x_1 = 0, & (\Pi_3 P_1) &\equiv x_1' x_2 - x_2' x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Es müssen sich nach der Voraussetzung des Satzes sechs Coefficienten $\lambda\lambda', \mu\mu', \nu\nu'$ so bestimmen lassen, dass

$$\begin{aligned}
\lambda (P_1 \Pi_1) + \lambda' (\Pi_2 P_3) &\equiv \mu (P_2 \Pi_1) + \mu' (P_3 \Pi_3)\\
&\equiv \nu (P_2 \Pi_2) + \nu' (\Pi_3 P_1).
\end{aligned}$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_3''' \lambda' &= x_2''' \mu' &&= -x_3'' \nu - x_2' \nu',\\
x_3' \lambda &= x_3'' \mu - x_1''' \mu' &&= x_1' \nu',\\
x_2' \lambda + x_1''' \lambda' &= x_2'' \mu &&= -x_1'' \nu.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\nu = -\frac{x_2''}{x_1''}\mu, \quad \nu' = \frac{x_3'}{x_1'}\lambda.$$

Dann bleiben die vier Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned}
x_3''' \lambda' - x_2''' \mu' &= 0,\\
\frac{x_2' x_3'}{x_1'}\lambda + x_3''' \lambda' - \frac{x_3'' x_2''}{x_1''}\mu &= 0,\\
x_3' \lambda - x_3'' \mu + x_1''' \mu' &= 0,\\
x_2' \lambda + x_1''' \lambda' - x_2'' \mu &= 0.
\end{aligned}$$

Der Verein derselben wird bedingt durch das Verschwinden der Determinante:

$$\begin{vmatrix}
0 & x_3''' & 0 & -x_2''' \\
\frac{x_2' x_3'}{x_1'} & x_3''' & \frac{x_3'' x_2''}{x_1''} & 0 \\
x_3' & 0 & -x_3'' & x_1''' \\
x_2' & x_1''' & -x_2'' & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Man multiplicire die erste Colonne mit x_1', die dritte mit x_1'', subtrahire die erste Zeile von der zweiten, subtrahire hierauf die mit $\frac{x_1'''}{x_3'''}$ multiplicirte erste Zeile von der letzten Zeile und multiplicire die nun entstandene letzte Colonne mit x_3'''. In der zweiten Colonne der resultirenden Determinante sind alle Glieder ausser dem ersten Null, und die Determinante verschwindet also für

$$\begin{vmatrix} x_1'x_2' & x_1''x_2'' & x_1'''x_2''' \\ x_2'x_3' & x_2''x_3'' & x_2'''x_3''' \\ x_3'x_1' & x_3''x_1'' & x_3'''x_1''' \end{vmatrix} = 0,$$

die sechs gegebenen Punkte sind demnach in einem Kegelschnitte enthalten (Nr. 31).

Der directe Pascal'sche Satz lautet: Verbindet man sechs Punkte eines Kegelschnitts zu einem Sechseck, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.

Nimmt man an, der directe Pascal'sche Satz gälte für irgend ein eingeschriebenes Sechseck nicht, so gruppire man dessen Ecken zu den beiden Dreiecken und verfahre ganz wie oben. Dann kann der Verein der Gleichungen für $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ nicht bestehen, oder, da ν und ν' immer nach den dort bezeichneten Formeln gewählt werden können, so kann der Verein der vier Gleichungen für $\lambda\lambda'$ und $\mu\mu'$ nicht bestehen, mithin kann die am Schluss angeführte Determinante nicht verschwinden; das ist aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, dass das Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben sein soll.

34. Der Beweis des Brianchon'schen Satzes verfolgt einen ganz ähnlichen Gang.

Gehen die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken eines Sechsecks durch einen Punkt, so ist das Sechseck einem Kegelschnitt umschrieben (Fig. 10).

Fig. 10.

Die auf einander folgenden Seiten des Sechsecks seien

$$T_1 \mathfrak{T}_1 \quad T_2 \mathfrak{T}_2 \quad T_3 \mathfrak{T}_3.$$

Dann sind die Gegeneckenpaare:

$$T_1\mathfrak{T}_1 \text{ und } \mathfrak{T}_2 T_3,$$
$$\mathfrak{T}_1 T_2 \text{ und } T_3\mathfrak{T}_3,$$
$$T_2\mathfrak{T}_2 \text{ und } \mathfrak{T}_3 T_1.$$

Die Gleichungen dieser sechs Punkte sind:

$$(T_1\mathfrak{T}_1) \equiv u_3' u_2 - u_2' u_3 = 0, \quad (\mathfrak{T}_2 T_3) \equiv u_3''' u_1 - u_1''' u_3 = 0;$$
$$(\mathfrak{T}_1 T_2) \equiv u_3'' u_2 - u_2'' u_3 = 0, \quad (T_3\mathfrak{T}_3) \equiv u_2''' u_1 - u_1''' u_2 = 0;$$
$$(T_2\mathfrak{T}_2) \equiv u_1'' u_3 - u_3'' u_1 = 0, \quad (\mathfrak{T}_3 T_1) \equiv u_1' u_2 - u_2' u_1 = 0.$$

Nach der Voraussetzung, dass die Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken auf einer Geraden liegen, giebt es immer sechs Coefficienten $\lambda\,\lambda'\,\mu\,\mu'\,\nu\,\nu'$, welche die Identitäten herbeiführen:

$$\lambda(T_1\mathfrak{T}_1) + \lambda'(\mathfrak{T}_2 T_3) \equiv \mu(\mathfrak{T}_1 T_2) + \mu'(T_3\mathfrak{T}_3) \equiv \nu(T_2\mathfrak{T}_2) + \nu'(\mathfrak{T}_3 T_1).$$

Hieraus ergeben sich durch Gleichsetzung der mit derselben Coordinate multiplicirten Coefficienten:

$$\begin{aligned} u_3'''\lambda' &= u_2'''\mu' &&= -u_3''\nu - u_2'\nu', \\ u_3'\lambda &= u_3''\mu - u_1'''\mu' &&= u_1'\nu', \\ u_2'\lambda &= u_1'''\lambda' = u_2''\mu &&= -u_1''\nu. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen eliminirt man ν und ν':

$$\nu = -\frac{u_2''}{u_1''}\mu, \quad \nu' = \frac{u_3'}{u_1'}\lambda.$$

Die übrigen Coefficienten erfüllen nach Substitution dieser Werthe das System:

$$\begin{aligned} u_3'''\lambda' \qquad\qquad\qquad &- u_2'''\mu' = 0, \\ \frac{u_2'u_3'}{u_1'}\lambda + u_3'''\lambda' - \frac{u_3''u_2''}{u_1''}\mu \qquad &= 0, \\ u_3'\lambda - u_3''\mu &+ u_1'''\mu' = 0, \\ u_2'\lambda + u_1'''\lambda' - u_2''\mu \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Der Verein dieser Gleichungen bedingt das Verschwinden der Determinante derselben. Diese Determinante ist bis auf einen nicht verschwindenden Factor identisch mit

$$\begin{vmatrix} u_1'u_2' & u_1''u_2'' & u_1'''u_2''' \\ u_2'u_3' & u_2''u_3'' & u_2'''u_3''' \\ u_3'u_1' & u_3''u_1'' & u_3'''u_1''' \end{vmatrix};$$

ihr Verschwinden zeigt an, dass die sechs Geraden einen Kegelschnitt berühren (Nr. 31).

Hierauf gestützt beweist man leicht apagogisch die Umkehr:

Die Verbindungsgeraden der Gegenecken jedes einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsecks gehen durch einen Punkt.

Mit Hülfe dieser vier Beweise für den Pascal'schen und Brianchon'schen Satz gewinnt man den Nachweis der folgenden beiden Sätze.

Wenn sechs Punkte sich so zu einem Sechseck anordnen lassen, dass die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare in einer Geraden liegen, so besteht diese Eigenschaft für jedes Sechseck aus den sechs Punkten.

Wenn sechs Geraden sich so als Seiten eines Sechsecks ordnen lassen, dass die drei Verbindungsgeraden je zweier Gegenecken sich in einem Punkte schneiden, so besteht diese Eigenschaft für jedes Sechseck aus den sechs Geraden.

Denn wenn die beiden Voraussetzungen erfüllt sind, so ist das erstere Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben, das letztere einem Kegelschnitt umschrieben. Da nun dann aber jedes beliebig angeordnete Sechseck der sechs Punkte oder der sechs Seiten einem Kegelschnitte eingeschrieben, bez. umschrieben ist, so kann man die zweiten Theile des Pascal'schen und des Brianchon'schen Satzes anwenden, — folglich sind die obigen Folgerungen richtig.

Sechs Punkte oder Geraden geben 2. 3. 4. 5. 6 Permutationen. Dabei sind alle Sechsecke geometrisch identisch, deren auf einander folgende Ecken verschiedene Permutationen aus demselben Cyclus bilden, sowie die Umkehrungen derselben. Zu jedem Cyclus gehören sechs Permutationen, und da jede mit ihrer Umkehrung gleichbedeutend ist, so verbleibt der zwölfte Theil von 2. 3. 4. 5. 6, d. i. 60 als Anzahl der verschiedenen Sechsecke.

Die Eigenschaften der verschiedenen Geraden, in denen sich die Gegenseitenpaare dieser verschiedenen Sechsecke schneiden, und der Punkte, durch welche die Verbindungsgeraden der Gegenecken gehen, werden besser durch rein geometrische Schlüsse abgeleitet; ihre Erörterung bleibt daher hier ausgeschlossen (siehe hierüber z. B. Steiner's Theorie der Kegelschnitte, herausgegeben von Schröter).

Ist ein Kegelschnitt einem Dreiecke eingeschrieben, so gehen die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte mit den den berührten Seiten gegenüberliegenden Ecken durch einen Punkt.

Ist ein Kegelschnitt einem Dreiecke umschrieben, so liegen die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Tangenten an den Gegenecken geschnitten werden, in einer Geraden.

Diese Sätze sind zwar leicht auf den Pascal'schen und den

Brianchon'schen Satz zurückzuführen; da aber ihr selbstständiger Beweis sich sehr leicht führen lässt, so mag derselbe nicht unerwähnt bleiben.

Man wähle das umschriebene Dreieck zum Axendreieck. Dann ist die Gleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts:

$$\alpha_{12} u_1 u_2 + \alpha_{23} u_2 u_3 + \alpha_{31} u_3 u_1 = 0.$$

Die Gleichungen der Tangentialpunkte der Seiten sind:

$$\begin{aligned} \text{auf } g_1: \quad P_1 &\equiv \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3 = 0, \\ \text{auf } g_2: \quad P_2 &\equiv \alpha_{12} u_1 + \alpha_{23} u_3 = 0, \\ \text{auf } g_3: \quad P_3 &\equiv \alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 = 0. \end{aligned}$$

Die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\equiv \alpha_{12} \alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} P_1 = 0, \\ \Pi_2 &\equiv \alpha_{12} \alpha_{23} u_2 + \alpha_{31} P_2 = 0, \\ \Pi_3 &\equiv \alpha_{23} \alpha_{31} u_3 + \alpha_{12} P_3 = 0 \end{aligned}$$

stellen Punkte dar, welche beziehentlich auf den Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ liegen. Da nun die linken Seiten derselben identisch sind, so liefern sie ein und denselben Punkt; es giebt daher in der That einen Punkt, der den drei Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ gemeinsam ist.

Ebenso beweist man den zweiten Satz.

§. 6.

Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf Punkte und durch fünf Tangenten.

1. Wenn ein Dreieck für einen Kegelschnitt sich selbst conjugirt und einem Viereck conjugirt ist, so liegen entweder alle Ecken des Vierecks auf dem Kegelschnitt, oder keine der Ecken.

Denn die Gleichung des Kegelschnitts in Bezug auf das Dreieck ist alsdann von der Form

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$$

Liegt die Ecke P_1 des Vierecks auf dem Kegelschnitte und sind die Coordinaten derselben in Bezug auf dasselbe Dreieck x_{k1}, so ist:

$$a_1 x_{11}^2 + a_2 x_{21}^2 + a_3 x_{31}^2 = 0.$$

Die Coordinaten x_{ki} der drei übrigen Ecken P_i des Vierecks erfüllen die Proportion:

$$x_{1i}^2 : x_{2i}^2 : x_{3i}^2 = x_{11}^2 : x_{21}^2 : x_{31}^2;$$

mithin ist auch für jeden dieser Punkte

$$a_1 x_{1i}^2 + a_2 x_{2i}^2 + a_3 x_{3i}^2 = 0;$$

es liegen also alle auf dem Kegelschnitte, q. e. d.

Wenn ein Punkt des Vierecks ausserhalb des Kegelschnitts liegt, so kann keiner der übrigen im Kegelschnitte enthalten sein; denn nimmt man an, einer derselben läge auf dem Kegelschnitte, so müssten nach dem obigen Beweise die anderen auch darauf liegen, was der Voraussetzung widerspricht. Wenn einer der Eckpunkte nicht auf dem Kegelschnitte liegt, so liegt demnach keiner von ihnen darauf.

2. **Wenn ein Dreieck für einen Kegelschnitt sich selbst conjugirt und einem Vierseit conjugirt ist, so berührt der Kegelschnitt entweder alle Seiten des Vierseits, oder keine derselben.**

Denn wird die Gleichung des Kegelschnitts

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0$$

von den Coordinaten u_{k1} einer Seite des Vierseits erfüllt, so genügen ihr auch die Coordinaten u_{ki} $(i = 2, 3, 4)$ der drei anderen Seiten, da ja

$$u_{1i}^2 : u_{2i}^2 : u_{3i}^2 = u_{11}^2 : u_{21}^2 : u_{31}^2.$$

Wird eine Seite nicht berührt, so kann nicht eine der übrigen berührt werden; denn sonst würden nach dem eben geführten Beweise alle Seiten berührt werden, was gegen die Voraussetzung ist.

3. **Ein Kegelschnitt ist durch ein Dreieck, welches in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst conjugirt ist, und durch zwei Punkte oder zwei Tangenten im Allgemeinen eindeutig bestimmt.**

Denn sind x_{k1}, x_{k2} die Coordinaten der Punkte, oder u_{k1}, u_{k2} die der Geraden in Bezug auf das gegebene Dreieck, so ist die Gleichung des Kegelschnitts, welcher die beiden Punkte enthält, bezogen auf das sich selbst conjugirte Dreieck:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{31}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & x_{32}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Kegelschnitt, welcher die beiden Geraden tangirt und für welchen das gegebene Dreieck sich selbst conjugirt ist, hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_{11}^2 & u_{21}^2 & u_{31}^2 \\ u_{21}^2 & u_{22}^2 & u_{32}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen werden dann und nur dann unbestimmt, wenn

$$x_{11}^2 : x_{21}^2 : x_{31}^2 = x_{12}^2 : x_{22}^2 : x_{32}^2,$$

bez.

$$u_{11}^2 : u_{21}^2 : u_{31}^2 = u_{12}^2 : u_{22}^2 : u_{32}^2,$$

weil dann die beiden Determinanten identisch verschwinden. In diesem Falle gehören die beiden Punkte demselben dem Dreieck conjugirten Viereck, die beiden Tangenten demselben dem Dreieck conjugirten Vierseit an.

4. Wenn zwei Vierecke demselben Dreieck conjugirt sind, so sind sie einem Kegelschnitt eingeschrieben.

Wenn zwei Vierseite demselben Dreieck conjugirt sind, so sind sie einem Kegelschnitt umschrieben.

Denn bestimmt man den Kegelschnitt, für welchen das den beiden Vierecken bez. Vierseiten conjugirte Dreieck sich selbst conjugirt ist, und welcher durch eine Ecke jedes Vierecks geht, bez. eine Seite jedes Vierseits berührt, so enthält derselbe auch alle übrigen Ecken der Vierecke, bez. berührt auch alle übrigen Seiten der beiden Vierseite.

5. Das Dreieck, welches einem Viereck conjugirt ist, ist für jeden dem Vierecke umschriebenen Kegelschnitt sich selbst conjugirt.

Denn jede Seite des Vierecks trifft den Kegelschnitt in zwei Ecken des Vierecks. In jeder der beiden Seiten, die sich in einer beliebigen Ecke des conjugirten Dreiecks schneiden, sind der Eckpunkt des Dreiecks und der Schnittpunkt der diesem Eckpunkte gegenüberliegenden Dreiecksseite mit den beiden Vierecksseiten den beiden Viereckspunkten harmonisch conjugirt; folglich ist jede Seite des Dreiecks die Polare der gegenüberliegenden Ecke, q. e. d.

Das Dreieck, welches einem Vierseit conjugirt ist, ist für jeden dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt sich selbst conjugirt.

In jeder Dreiecksseite liegen zwei Ecken des Vierseits. Verbindet man diese mit dem gegenüberliegenden Dreieckspunkte, so bilden an jeder der zwei Ecken die letztere Verbindungslinie und die erstere Dreiecksseite mit den durch die Ecke gehenden zwei Vierseitsseiten zwei harmonische Paare; folglich hat jede Dreiecksseite den gegenüberliegenden Eckpunkt zum Pole, q. e. d.

6. Bestimmung der Parabeln durch vier Punkte.

Man beziehe die vier Punkte auf das ihnen conjugirte Dreieck. Für die Parabel, welche die vier Punkte enthält, ist dieses Dreieck

sich selbst conjugirt, also hat die Parabel in Bezug auf dies Dreieck eine Gleichung der Form

a) $$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$$

Ist diese Gleichung so bestimmt, dass ihr einer der vier gegebenen Punkte genügt, so genügen ihr auch die anderen, nach Nr. 1; man kann daher einen Punkt Π von den vier gegebenen hervorheben und die anderen drei ganz ausser Betracht lassen, sobald man die Parabelgleichung in Bezug auf das Dreieck von der Form a) voraussetzt.

Man denke sich den variabeln Punkt P der Parabel einen Augenblick festgehalten. Dann ist der durch Π und P eindeutig bestimmte Kegelschnitt eine Parabel; die Coefficienten der Gleichung dieses Kegelschnitts erfüllen demnach die für Parabeln charakteristische Gleichung. Diese Bedingungsgleichung enthält nur die Coordinaten von Π und P. Denkt man sich P nun wieder variabel, so enthält diese Gleichung die Bedingung dafür, dass P mit den vier Punkten Π auf einer Parabel liegt. Diese erwähnte Bedingungsgleichung muss demnach die Gleichungen der durch die vier Punkte gehenden Parabeln enthalten.

Seien, um diesen Gedanken auszuführen, $\mathfrak{x}_k$ die laufenden Coordinaten in der Gleichung des durch Π und P gelegten Kegelschnitts. Dann ist die Gleichung desselben

$$K \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1^2 & \mathfrak{x}_2^2 & \mathfrak{x}_3^2 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man

$$\gamma_i = \begin{vmatrix} x_k^2 & x_l^2 \\ \xi_k^2 & \xi_l^2 \end{vmatrix},$$

wobei ikl ein Cyclus von 1, 2, 3 ist, so ist auch

$$K \equiv \gamma_1 \mathfrak{x}_1^2 + \gamma_2 \mathfrak{x}_2^2 + \gamma_3 \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass dies eine Parabel ist, lautet:

$$\frac{g_1^2}{\gamma_1} + \frac{g_2^2}{\gamma_2} + \frac{g_3^2}{\gamma_3} = 0,$$

oder, um die Brüche zu beseitigen:

b) $$g_1^2 \gamma_2 \gamma_3 + g_2^2 \gamma_3 \gamma_1 + g_3^2 \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Man sehe in dieser Gleichung die Coordinaten von P als Variabele an. Sie ist in Bezug auf dieselbe vom vierten Grade, enthält aber nur gerade Potenzen. Betrachtet man sie als quadratische Gleichung von $x_1^2 x_2^2 x_3^2$, so lässt sich leicht nachweisen, dass die Discriminante

verschwindet, mithin die linke Seite von 6) in zwei Factoren zerfällt, welche in Bezug auf $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ linear sind. Man erhält diese Factoren, indem man die Gleichung b) z. B. in Rücksicht auf die Unbekannte x_1^2 auflöst.

Die entwickelte Gleichung b) lautet, mit (— 1) erweitert:

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} g_1^2 \xi_3^2 \xi_2^2 x_1^4 &- [(g_1^2 \xi_1^2 + g_2^2 \xi_2^2 - g_3^2 \xi_3^2) \xi_3^2 x_2^2 \\ &+ (g_1^2 \xi_1^2 - g_2^2 \xi_2^2 + g_3^2 \xi_3^2) \xi_2^2 x_3^2] x_1^2 + g_2^2 \xi_1^2 \xi_3^2 x_2^4 \\ &- (g_1^2 \xi_1^2 + g_2^2 \xi_2^2 + g_3^2 \xi_3^2) \xi_1^2 x_2^2 x_3^2 + g_3^2 \xi_1^2 \xi_2^2 x_3^4 = 0. \end{aligned}$$

Die Discriminante dieser quadratischen Gleichung für x_1^2 ist:

$$\begin{aligned} &[(g_1^2 \xi_1^2 + g_2^2 \xi_2^2 - g_3^2 \xi_3^2) \xi_3^2 x_2^2 + (g_1^2 \xi_1^2 - g_2^2 \xi_2^2 + g_3^2 \xi_3^2) \xi_2^2 x_3^2]^2 \\ &\quad - 4 g_1^2 \xi_3^2 \xi_2^2 [g_2^2 \xi_1^2 \xi_3^2 x_2^4 - (- g_1^2 \xi_1^2 + g_2^2 \xi_2^2 \\ &\quad + g_3^2 \xi_3^2) \xi_1^2 x_2^2 x_3^2 + g_3^2 \xi_1^2 \xi_2^2 x_3^4]. \end{aligned}$$

Dieselbe lässt sich in folgendes Product umformen:

$$\text{d)}\quad \begin{aligned} (\xi_3^2 x_2^2 - \xi_2^2 x_3^2)^2 (g_1^4 \xi_1^4 &+ g_2^4 \xi_2^4 + g_3^4 \xi_3^4 - 2 g_1^2 g_2^2 \xi_1^2 \xi_2^2 \\ &- 2 g_2^2 g_3^2 \xi_2^2 \xi_3^2 - 2 g_3^2 g_1^2 \xi_3^2 \xi_1^2). \end{aligned}$$

Bezeichnet man die positive Wurzel des zweiten Factors mit r und kürzt ab

$$\begin{aligned} g_1^2 \xi_1^2 + g_2^2 \xi_2^2 - g_3^2 \xi_3^2 &= \alpha, \\ g_1^2 \xi_1^2 - g_2^2 \xi_2^2 + g_3^2 \xi_3^2 &= \beta, \end{aligned}$$

so sind die Wurzeln von e)

$$x^2 = \frac{(\alpha \pm r) \xi_3^2 x_2^2 + (\beta \mp r) \xi_2^2 x_3^2}{2 g_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2}.$$

Die beiden Factoren von c) sind demnach:

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} [2 g_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 x_1^2 &- (\alpha + r) \xi_3^2 x_2^2 + (\beta - r) \xi_2^2 x_3^2] [2 g_1^2 \xi_2^2 \xi_3^2 x_1^2 \\ &- (\alpha - r) \xi_3^2 x_2^2 + (\beta + r) \xi_2^2 x_3^2] = 0. \end{aligned}$$

Schreibt man jeden Factor in der Form

$$A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 = 0,$$

so sieht man mit Hülfe der Werthe von r, α und β leicht, dass beide Factoren die charakteristische Eigenschaft der Parabelgleichung haben:

$$g_1^2 BC + g_2^2 CA + g_3^2 AB = 0.$$

Die Gleichung

$$\begin{aligned} g_1^2 \gamma_2 \gamma_3 + g_2^2 \gamma_3 \gamma_1 + g_3^2 \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ \gamma_i = x_k^2 \xi_i^2 - x_i^2 \xi_k^2 \end{aligned}$$

stellt demnach die beiden Parabeln dar, welche sich im Allgemeinen durch die vier gegebenen Punkte Π legen lassen.

Die beiden Parabeln werden imaginär, d. h. es lassen sich keine Parabeln durch die vier Punkte legen, wenn der zweite

Factor von d) negativ ist; es giebt nur eine Parabel, wenn derselbe verschwindet. Dieser Factor ist identisch mit

$$\text{f)}\quad -(g_1\xi_1+g_2\xi_2+g_3\xi_3)(g_1\xi_1+g_2\xi_2-g_3\xi_3)(g_1\xi_1-g_2\xi_2+g_3\xi_3)(-g_1\xi_1+g_2\xi_2+g_3\xi_3)$$
$$=\Delta(\Delta-2g_1\xi_1)(\Delta-2g_2\xi_2)(\Delta-2g_3\xi_3).$$

Unter den vier Punkten Π ist immer einer im Innern des Dreiecks gelegen, wie aus den Erörterungen über das vollständige Viereck hervorgeht. Dies sei der Punkt Π (was ohne Beschränkung angenommen werden kann).

Von den drei letzten Factoren kann dann höchstens einer negativ oder Null sein, denn die Summe je zweier ist positiv.

Aus den Formeln für die Coordinaten der Ecken eines Vierecks in Bezug auf das conjugirte Dreieck geht hervor, dass jeder der drei übrigen Punkte zwei positive und eine negative Coordinate hat, wenn die drei Differenzen

$$\Delta-2g_i\xi_i$$

sämmtlich positiv sind. Ist hingegen eine negative darunter

$$\Delta-2g_i\xi_i<0,$$

so hat P_i zwei negative und eine positive Coordinate, während P_k und P_l zwei positive und eine negative haben.

Hat nun jeder Punkt P_i zwei positive und eine negative Coordinate, so liegt P_i auf der Geraden $A_i\Pi$ ausserhalb des Dreiecks, so dass die Reihenfolge der Punkte ist: $A_i\Pi P_i$.

Hieraus folgt weiter, dass A_l in dem Winkel $P_k\Pi P_i$ liegt. Da nun $P_l A_l$ und Π auf einer Geraden liegen und die Reihenfolge $A_l\Pi P_l$ haben, so folgt, dass Π und P_l auf derselben Seite der Geraden $P_i P_k$ liegen. Wendet man dies für die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ an, so findet man, dass keine der Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ zwischen Π und der gegenüberliegenden Ecke hindurchgeht. Demnach muss Π im Innern des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ liegen.

Man sieht leicht, dass diese Betrachtungen umkehrbar sind:

Liegt einer von den vier gegebenen Punkten im Innern des von den drei anderen gebildeten Dreiecks, so sind die drei Differenzen

$$\Delta-2g_i\xi_i,\quad i=1,2,3$$

für den eingeschlossenen Punkt positiv.

Denn ist P_4 im Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ gelegen, so sind die Ecken A_i des conjugirten Dreiecks die Schnitte der Geraden $P_i P_4$ mit der Seite $P_k P_l$ des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Hieraus folgt, dass P_i im positiven Winkel $A_k \hat{A} A_l$ und ausserhalb des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ gelegen

ist; mithin sind zwei seiner Coordinaten in Bezug auf das conjugirte Dreieck positiv, eine negativ. Leitet man nun die Coordinaten von P_i aus denen von P_4 nach den gegebenen Formeln ab, so folgt, dass die Differenzen

$$\varDelta - 2 g_i \xi_i,$$

wenn ξ_i die Coordinaten von P_4 sind, sämmtlich positiv sind.

Diese Umkehrung und der directe Satz beweisen, dass keiner von den vier Punkten im Innern des Dreiecks der drei anderen Punkte gelegen ist, wenn für den im Innern des conjugirten Dreiecks gelegenen Punkt eine der Differenzen

$$\varDelta - 2 g_i \xi_i$$

negativ ist; und umgekehrt:

Wenn keiner der vier Punkte im Innern des Dreiecks der drei anderen liegt, so ist eine der Differenzen

$$\varDelta - 2 g_i \xi_i$$

für den Punkt im Innern des conjugirten Dreiecks negativ.

Ist nun aber eine dieser Differenzen negativ, so ist r^2 positiv; sind hingegen sämmtliche drei Differenzen positiv, so ist r^2 negativ.

Hieraus folgt der Satz:

Durch vier Punkte lassen sich zwei Parabeln legen oder keine, je nachdem keiner von den vier Punkten im Innern des von den drei anderen gebildeten Dreiecks liegt oder nicht.

Verschwindet eine der Differenzen

$$\varDelta - 2 g_i \xi_i,$$

so ist P_i der unendlich ferne Punkt der Geraden $A_i \Pi$; und umgekehrt:

Ist einer von den vier Punkten unendlich fern und die Richtung gegeben, in der er liegt, so gehen drei von den sechs Seiten des Vierecks der gegebenen Richtung parallel; für den im Innern des conjugirten Dreiecks gelegenen Punkt verschwindet dann eine der Differenzen

$$\varDelta - 2 g_i \xi_i.$$

Hieraus folgt:

Durch drei endliche und einen unendlich fernen Punkt lässt sich immer und nur eine Parabel legen.

7. Bestimmung der Parabel durch vier Tangenten.

Demselben Gedankengange, wie in voriger Nummer, folgend, stelle man die Bedingung dafür auf, dass der Kegelschnitt, welcher ausser den gegebenen Geraden $\mathfrak{T}\, T_1\, T_2\, T_3$ noch eine willkürliche

fünfte T berührt, eine Parabel ist. Diese Bedingungsgleichung enthält ausser den Coordinaten der gegebenen Tangenten noch die der angenommenen fünften. Denkt man sich nun die letztere variabel und ihre Coordinaten gemäss der Bedingungsgleichung gewählt, so berührt diese Tangente immer eine der die vier anderen berührenden Parabeln; es müssen daher die Gleichungen dieser Parabeln in der erwähnten Bedingungsgleichung enthalten sein.

Nimmt man das den vier gegebenen Geraden conjugirte Dreieck zum Axendreieck, so hat der durch die fünf Tangenten $\mathfrak{T}\,T_1\,T_2\,T_3$ und T bestimmte Kegelschnitt eine Gleichung von der Form

$$a_1\,\mathfrak{u}_1^2 + a_2\,\mathfrak{u}_2^2 + a_3\,\mathfrak{u}_3^2 = 0.$$

Es genügt, die Gleichung so zu bestimmen, dass sie von den Coordinaten von $\mathfrak{T}$ erfüllt wird; denn es genügen ihr dann auch die Coordinaten der übrigen Seiten des Vierseits $\mathfrak{T}\,T_1\,T_2\,T_3$.

Der Kegelschnitt, welcher die fünf Geraden $\mathfrak{T}\,T_1\,T_2\,T_3$ berührt, hat demnach die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{u}_1^2 & \mathfrak{u}_2^2 & \mathfrak{u}_3^2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ \mathrm{u}_1^2 & \mathrm{u}_2^2 & \mathrm{u}_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass dies eine Parabel ist, lautet

$$(u_2^2\,\mathrm{u}_3^2 - u_3^2\,\mathrm{u}_2^2) + (u_3^2\,\mathrm{u}_1^2 - u_1^2\,\mathrm{u}_3^2) + (u_1^2\,\mathrm{u}_2^2 - u_2^2\,\mathrm{u}_1^2) = 0,$$

oder nach den Coordinaten von T geordnet:

$$\text{f)}\qquad (\mathrm{u}_3^2 - \mathrm{u}_2^2)\,u_1^2 + (\mathrm{u}_1^2 - \mathrm{u}_3^2)\,u_2^2 + (\mathrm{u}_2^2 - \mathrm{u}_1^2)\,u_3^2 = 0.$$

Die Coefficientensumme dieser Gleichung ergiebt in der That das Kennzeichen der Parabelgleichung:

$$(\mathrm{u}_3^2 - \mathrm{u}_2^2) + (\mathrm{u}_1^2 - \mathrm{u}_3^2) + (\mathrm{u}_2^2 - \mathrm{u}_1^2) = 0.$$

Hieraus folgt:

Es giebt immer eine und nur eine Parabel, welche vier gegebene Gerade berührt.

8. Bestimmung der Art des Kegelschnitts, welcher fünf gegebene Punkte enthält.

Man beziehe den Kegelschnitt auf ein Dreieck, welches zu vier von den Punkten conjugirt ist. Die Coordinaten eines dieser vier Punkte in Bezug auf dieses Dreieck seien $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$; die Coordinaten des fünften Punktes $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$. Alsdann ist die Gleichung des Kegelschnitts durch diese fünf Punkte:

$$\text{g)}\qquad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ \mathfrak{x}_1^2 & \mathfrak{x}_2^2 & \mathfrak{x}_3^2 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

h) $$\gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^2 + \gamma_3 x_3^2 = 0,$$

wenn $\gamma_i = \mathfrak{x}_k^2 \xi_l^2 - \mathfrak{x}_l^2 \xi_k^2$, und $i\,k\,l$ ein Cyclus von 1 2 3.

Die Coordinaten $X_1\, X_2\, X_3$ des Mittelpunktes, deren Vorzeichen über die Natur des Kegelschnitts entscheiden, sind

i) $$X_i = \frac{\frac{g_i^2}{\gamma_i}}{\frac{g_1^2}{\gamma_1} + \frac{g_2^2}{\gamma_2} + \frac{g_3^2}{\gamma_3}} = \frac{g_i^2 \gamma_k \gamma_l}{g_1^2 \gamma_2 \gamma_3 + g_2^2 \gamma_3 \gamma_1 + g_3^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2}.$$

Da nun

$$\gamma_i = \xi_k^2 \xi_l^2 \left(\frac{\mathfrak{x}_k^2}{\xi_k^2} - \frac{\mathfrak{x}_l^2}{\xi_l^2}\right),$$

so hängt das Vorzeichen von γ_i nur von dem des zweiten Factors ab. Da ferner die Summe dieser zweiten Factoren von γ_1, γ_2 und γ_3 identisch verschwindet, so folgt, dass unter demselben stets ein negativer und ein positiver vorhanden sind. Demnach sind unter den Producten

$$\gamma_2 \gamma_3, \quad \gamma_3 \gamma_1, \quad \gamma_1 \gamma_2$$

immer zwei negative und ein positives.

Die Natur des Kegelschnittes hängt demnach nur vom Vorzeichen des Polynoms

k) $$g_1^2 \gamma_2 \gamma_3 + g_2^2 \gamma_3 \gamma_1 + g_3^2 \gamma_1 \gamma_2$$

ab. Ist dasselbe positiv, so haben zwei Coordinaten des Centrums negative Zeichen, die dritte ist positiv; mithin ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Ist hingegen das Polynom k) negativ, so sind zwei Coordinaten des Centrums positiv, die dritte negativ, und dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Giebt es nun unter den fünf gegebenen Punkten vier, die so beschaffen sind, dass einer von ihnen im Dreieck der drei anderen liegt, so wähle man das diesen vier Punkten conjugirte Dreieck als Axendreieck. Da durch diese vier Punkte keine Parabel möglich ist, so wird das Polynom k) für keinen Punkt der Ebene Null, kann daher auch nicht in zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{P}(\mathfrak{x}_k)$ verschiedene Vorzeichen haben.

Da nun k) für den Punkt A_1, d. i. für $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_2 = 0$ sich auf

$$- g_1^2 \xi_3^2 \xi_2^2 \mathfrak{x}_1^4$$

reducirt, so ist demnach k) für alle Punkte der Ebene negativ. Hieraus folgt:

Wenn von vier der gegebenen Punkte einer im Dreieck der drei anderen liegt, so ist durch jeden fünften

Punkt, wo auch immer derselbe gelegen ist, eine Hyperbel bestimmt.

Oder: *Wenn sich durch vier Punkte keine Parabel legen lässt, so sind alle durch dieselben gelegten Kegelschnitte Hyperbeln.*

Wenn sich unter den fünf Punkten nicht vier solche befinden, von denen einer im Dreiecke der drei anderen liegt, so gelten folgende Unterscheidungen:

Liegt einer der fünf Punkte unendlich fern, so beziehe man den Kegelschnitt auf ein Dreieck, dessen conjugirtes Viereck den unendlich fernen Punkt als Eckpunkt enthält. Dann ist das Polynom k) ein negatives Quadrat, also für alle Punkte $\mathfrak{x}_k$ negativ; mithin *ist durch je vier im Endlichen gelegene und einen unendlich fernen Punkt stets eine Hyperbel bestimmt.*

Ist keiner der fünf Punkte unendlich fern und keiner innerhalb des Dreiecks von dreien derselben, so beziehe man den Kegelschnitt auf das Dreieck, welches zu irgend vier Punkten unter den fünf conjugirt ist, und construire die beiden durch diese vier Punkte bestimmten Parabeln.

Keine dieser Parabeln geht ins Innere des von den vier Punkten gebildeten convexen Vierecks; denn hätte eine Parabel einen Punkt Π im Innern dieses Vierecks, so könnte derselbe nicht auf einer Diagonale liegen — da diese sonst drei Kegelschnittspunkte enthalten würde —, läge also in dem einen von drei Punkten der Parabel gebildeten Dreiecke; dies ist aber unmöglich.

Die Fläche des convexen Vierecks liegt demnach im Innern beider Parabeln. Da nun innerhalb des convexen Vierecks immer ein und nur ein Eckpunkt des dem Vierecke conjugirten Dreiecks liegt, so befindet sich demnach diese Ecke im Innern beider Parabeln. Für dieselbe ist, wie für jede Ecke des Axendreiecks, das Polynom k) *negativ.*

Um aus diesem Bereich in eines der vier Ebenenstücke (zwei einseitig offene und zwei sichelförmige) zu gelangen, welche von der einen Parabel aus-, von der andern eingeschlossen werden, muss man die eine Parabel mindestens einmal überschreiten. Dabei wechselt der eine Factor von k) sein Zeichen, der andere nicht.

Für alle Punkte demnach, die von der einen Parabel aus- und von der andern eingeschlossen sind, ist das Polynom k) *positiv.*

Um hingegen aus dem erstern Bereiche zu einem von beiden Parabeln ausgeschlossenen Punkte zu gelangen, muss man beide Parabeln überschreiten; dabei wechseln beide Factoren von k) ihr

Zeichen, das Zeichen des Products beider, d. i. des Polynoms k), ist demnach unverändert negativ.

Hieraus folgt der Satz:

Wenn keiner der fünf Punkte innerhalb des Dreiecks von dreien derselben liegt, so construire man die beiden durch vier dieser Punkte bestimmten Parabeln. Ist der fünfte Punkt von beiden Parabeln ausgeschlossen, so ist durch die fünf Punkte eine Hyperbel bestimmt. Ist hingegen der fünfte Punkt von einer Parabel ein-, von der andern ausgeschlossen, so ist durch die fünf Punkte eine Ellipse bestimmt.

9. Bestimmung der Art des Kegelschnitts, welcher fünf gegebene Gerade berührt.

Man bestimmt die Gleichung des Kegelschnitts in Bezug auf das zu vier von den fünf Geraden conjugirte Dreieck. Eine von diesen vier Geraden hat lauter positive Coordinaten; dieselbe heisse T und habe die Coordinaten $v_1\, v_2\, v_3$. Die Coordinaten der fünften Geraden $\mathfrak{T}$ seien $\mathfrak{u}_k$. Dann ist die Gleichung des durch die fünf Geraden bestimmten Kegelschnitts

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ \mathfrak{u}_1^2 & \mathfrak{u}_2^2 & \mathfrak{u}_3^2 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Oder:

l) $$\gamma_1 u_1^2 + \gamma_2 u_2^2 + \gamma_3 u_3^2 = 0,$$

wenn $\gamma_i = \mathfrak{u}_k^2 v_l^2 - \mathfrak{u}_l^2 v_k^2$, $i\,k\,l$ ein Cyclus von 1 2 3.

Die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kegelschnitts sind:

m) $$x_k = \frac{\gamma_k h_k}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}.$$

Der Nenner wird Null für die Tangenten der durch die ersteren vier Geraden bestimmten Parabel. Für die Coordinaten aller die Parabel schneidenden Geraden erhält er ein und dasselbe Zeichen; für alle die Parabel nicht schneidenden Geraden erhält er das entgegengesetzte Zeichen.

Da nun, wie bei jedem Kegelschnitt so auch hier, zwei Seiten des sich selbst conjugirten Axendreiecks die Parabel schneiden, die dritte ausserhalb liegt, so werden demnach die beiden Seiten die Parabel schneiden, durch deren Coordinaten das Trinom

n) $$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

Werthe mit demselben Vorzeichen erhält.

Setzt man nun nach einander die Coordinaten der drei Seiten in

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \equiv \mathfrak{u}_2^2 v_3^2 - \mathfrak{u}_3^2 v_2^2 + \mathfrak{u}_3^2 v_1^2 - \mathfrak{u}_1^2 v_3^2 + \mathfrak{u}_1^2 v_2^2 - \mathfrak{u}_2^2 v_1^2,$$

so erhält man, wenn $G_1 G_2 G_3$ die Seiten des Axendreiecks bezeichnen:

$$\text{o)} \quad \begin{aligned} &\text{für } G_1: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = u_1^2(v_2^2 - v_3^2) \\ &\;\;\text{„} \;\; G_2: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \equiv u_2^2(v_3^2 - v_1^2) \\ &\;\;\text{„} \;\; G_3: \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \equiv u_3^2(v_1^2 - v_2^2). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass von diesen drei Ausdrücken o) derjenige ein von den anderen abweichendes Zeichen hat, welcher die der Grösse nach mittlere von den drei Coordinaten v_k nicht enthält.

Man denke sich nun $v_1 v_2 v_3$ der Grösse nach geordnet, was unbeschadet der Allgemeinheit geschieht, so dass also

$$v_1 > v_2 > v_3.$$

Dann liegt demnach G_2 ganz ausserhalb der Parabel, während G_1 und G_3 die Parabel schneiden. Da ferner

$$v_2^2 - v_3^2 < 0, \quad v_3^2 - v_1^2 > 0, \quad v_1^2 - v_2^2 < 0,$$

so folgt, dass für die Coordinaten aller ausserhalb der Parabel liegenden Geraden das Trinom

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

positiv ist, für alle Parabelsecanten hingegen negativ.

Hieraus folgt weiter:

Schneidet die Gerade $\mathfrak{T}$ die Parabel nicht und ist für dieselbe unter den Grössen γ_i eine negative und zwei positive, so ist der Kegelschnitt der fünf gegebenen Tangenten eine Hyperbel; sind hingegen zwei der γ_i negativ, so ist durch die fünf Tangenten eine Ellipse bestimmt.

Schneidet hingegen $\mathfrak{T}$ die Parabel, so ist der Kegelschnitt der fünf Tangenten eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem zwei von den γ_i oder nur eine γ negativ ist.

Es kommt nun noch darauf an, aus der Lage der fünften Tangenten gegen die übrigen vier zu entscheiden, welche Vorzeichen die γ_i haben.

Zu diesem Zwecke stelle man die Gleichungen der vier ersten Tangenten auf und berechne die Coordinaten ihrer Schnittpunkte.

Es sind die Coordinaten

	$u_1 =$	$u_2 =$	$u_3 =$	
von T:	v_1	v_2	v_3	
„ T_1:	$-kv_1$	kv_2	kv_3,	$k = \Delta : (\Delta - 2 g_1 v_1^2)$,
„ T_2:	kv_1	$-kv_2$	kv_3,	$k = \Delta : (\Delta - 2 g_2 v_2^2)$,
„ T_3:	kv_1	kv_2	$-kv_3$,	$k = \Delta : (\Delta - 2 g_3 v_3^2)$.

Demnach sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$\text{p)}\quad \begin{aligned} \mathrm{T} &\equiv \frac{v_1}{h_1}x_1 + \frac{v_2}{h_2}x_2 + \frac{v_3}{h_3}x_3 = 0,\\ T_1 &\equiv -\frac{v_1}{h_1}x_1 + \frac{v_2}{h_2}x_2 + \frac{v_3}{h_3}x_3 = 0,\\ T_2 &\equiv \frac{v_1}{h_1}x_1 - \frac{v_2}{h_2}x_2 + \frac{v_3}{h_3}x_3 = 0,\\ T_3 &\equiv \frac{v_1}{h_1}x_1 + \frac{v_2}{h_2}x_2 - \frac{v_3}{h_3}x_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung von $\mathfrak{T}$ ist

$$\mathfrak{T} \equiv \frac{\mathfrak{u}_1}{h_1}x_1 + \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2}x_2 + \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3}x_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen p) lassen sich die Coordinaten der Schnittpunkte der vier Geraden T T_1 T_2 T_3 berechnen. Man erhält für die Coordinaten

des Schnittes von	x_1	x_2	x_3
1) T und T_1:	$0,$	$-\frac{v_3}{v_2 - v_3}h_2,$	$\frac{v_2}{v_2 - v_3}h_3;$
2) T „ T_2:	$\frac{v_3}{v_3 - v_1}h_1,$	$0,$	$-\frac{v_1}{v_3 - v_1}h_3;$
3) T „ T_3:	$-\frac{v_2}{v_1 - v_2}h_1,$	$\frac{v_1}{v_1 - v_2}h_2,$	$0;$
4) T_1 „ T_2:	$\frac{v_2}{v_1 + v_2}h_1,$	$\frac{v_1}{v_1 + v_2}h_2,$	$0;$
5) T_1 „ T_3:	$\frac{v_3}{v_3 + v_1}h_1,$	$0,$	$\frac{v_1}{v_3 + v_1}h_3;$
6) T_2 „ T_3:	$0,$	$\frac{v_3}{v_2 + v_3}h_2,$	$\frac{v_2}{v_2 + v_3}h_3.$

Diese Werthe setze man in die Gleichung von $\mathfrak{T}$ ein; bezeichnet man das Substitutionsresultat des Schnittpunktes T T_i in $\mathfrak{T}$ mit Π_{4i}, sowie das des Schnittpunktes T_k T_i in $\mathfrak{T}$ mit Π_{ki}, so erhält man folgende Resultate:

$$\text{q)}\quad \begin{aligned} \Pi_{41} \,.\, \Pi_{23} &= -\frac{1}{v_2^2 - v_3^2}(\mathfrak{u}_2^2 v_3^2 - \mathfrak{u}_3^2 v_2^2) = -\frac{\gamma_1}{v_2^2 - v_3^2}\\ \Pi_{42} \,.\, \Pi_{13} &= -\frac{1}{v_3^2 - v_1^2}(\mathfrak{u}_3^2 v_1^2 - \mathfrak{u}_1^2 v_3^2) = -\frac{\gamma_2}{v_3^2 - v_1^2}\\ \Pi_{43} \,.\, \Pi_{12} &= -\frac{1}{v_1^2 - v_2^2}(\mathfrak{u}_1^2 v_2^2 - \mathfrak{u}_2^2 v_1^2) = -\frac{\gamma_3}{v_1^2 - v_2^2}. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen der γ hängen gemäss diesen Formeln mit den Vorzeichen zusammen, welche das Polynom $\mathfrak{T}$ erhält, wenn man die Coordinaten der sechs Punkte des Vierseits der vier ersten Tangenten substituirt.

Substituirt man in die Gleichung einer Geraden die Coordinaten zweier Punkte, so haben die Resultate dann und nur dann gleiche Zeichen, wenn die beiden Punkte auf derselben Seite der Geraden liegen; sie haben hingegen ungleiche Zeichen, wenn die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen. Im erstern Falle ist das Product der beiden Substitutionsresultate positiv, im letztern negativ.

Bezeichnet man den Schnitt von T und T_i mit P_{4i}, den von T_k und T_i mit P_{ki}, und bemerkt man ferner, dass von den Differenzen

$$v_1^2 - v_2^2,\quad v_2^2 - v_3^2,\quad v_3^2 - v_1^2$$

nur die letzte positiv ist, so erhält man folgende geometrische Deutung der Vorzeichen der γ:

Ist $\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 > 0$, so liegen von den vier Punkten P_{41}, P_{23}, P_{43}, P_{21} entweder je zwei auf einer Seite von $\mathfrak{T}$, oder alle vier auf derselben Seite.

Ist $\gamma_1 > 0$, $\gamma_3 < 0$, oder $\gamma_1 < 0$, $\gamma_3 > 0$, so liegen drei dieser Punkte auf der einen, der vierte auf der andern Seite von $\mathfrak{T}$.

Ist $\gamma_1 < 0$, $\gamma_3 < 0$, so liegen auf jeder Seite von $\mathfrak{T}$ zwei der vier genannten Punkte.

Ist ferner $\gamma_2 > 0$, so ist $\Pi_{42} . \Pi_{13}$ negativ, mithin liegt auf jeder Seite von $\mathfrak{T}$ einer der beiden Punkte P_{42} und P_{13}; ist hingegen $\gamma_2 < 0$, so ist $\Pi_{42} . \Pi_{13}$ positiv, also liegen dann die beiden Punkte P_{42} P_{13} auf derselben Seite von $\mathfrak{T}$.

Berücksichtigt man, dass unter den Grössen $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ immer eine positive und eine negative ist, so erhält man für die sechs möglichen Fälle der Vertheilung der Vorzeichen das Ergebniss:

Sind zwei der γ positiv, so liegt stets eine ungerade Anzahl der sechs Punkte auf derselben Seite von $\mathfrak{T}$; sind hingegen zwei der γ negativ, so liegt eine gerade Anzahl dieser Punkte auf derselben Seite von $\mathfrak{T}$.

Hierdurch gewinnt nun die oben gegebene Entscheidung über die Natur des Kegelschnitts geometrische Anschaulichkeit; alles hier Erörterte zusammenfassend, erhält man:

Um über die Natur eines durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitts zu entscheiden, construire man die durch vier derselben bestimmte Parabel. Berührt die-

selbe auch die fünfte Tangente, so ist die Parabel der gesuchte Kegelschnitt.

Schneidet die fünfte Tangente diese Parabel nicht, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem eine ungerade oder eine gerade Anzahl der sechs Schnittpunkte der vier Parabeltangenten auf derselben Seite der fünften Tangente liegt.

Schneidet die fünfte Tangente die Parabel, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl jener sechs Punkte auf derselben Seite der fünften Tangente liegt.

Analytische Geometrie des Raumes.

§. 1.

Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene.

1. Unter den homogenen Coordinaten eines Punktes versteht man die Abstände x_k ($k = 1, 2, 3, 4$) von den vier Flächen eines Tetraeders, des Axentetraeders.

Man rechnet die Coordinaten positiv, wenn sie ins Innere des Tetraeders gerichtet sind, im Gegenfalle negativ.

Bezeichnet man mit g_k den Inhalt der Tetraederfläche, zu welcher x_k normal ist, und mit $\varDelta$ das dreifache Volumen des Tetraeders, so erfüllen die Coordinaten eines Punktes die Gleichung

$$\Sigma g_k x_k \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 \equiv \varDelta.$$

2. Durch je vier mit Vorzeichen behaftete Strecken x_k, welche der Gleichung $\Sigma g_k x_k = \varDelta$ genügen (wobei k, wie immer zukünftig, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, 1, 2, 3 oder 4 bedeute), ist ein Punkt eindeutig bestimmt, der x_k zu Coordinaten hat.

3. Transformation aus einem orthogonalen in ein homogenes System.

Die Gleichung der Ebene g_k im orthogonalen System sei

$$a_k x + b_k y + c_k z = 1.$$

Der Ursprung hat den Abstand von g_k:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}}.$$

Diese Wurzel werde immer positiv gerechnet.

Durch den Punkt P' mit den Coordinaten x', y', z' lege man eine Parallelebene zu g_k; dieselbe hat die Gleichung

$$\mu a_k x + \mu b_k y + \mu c_k z = 1, \quad \mu = \frac{1}{a_k x' + b_k y' + c_k z'}.$$

Demnach hat der Ursprung von dieser Ebene den Abstand

$$e'_k = \frac{a_k x' + b_k y' + c_k z'}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv für alle Punkte P', welche auf der g_k zugewandten Seite der durch den Ursprung zu g_k gelegten Parallelebene liegen, negativ für die Punkte, welche durch die Parallelebene von g_k getrennt werden. Demnach ist $e_k - e'_k$ der Abstand von P' nach g_k, und zwar mit dem positiven Vorzeichen für alle Punkte, welche mit dem Ursprung auf derselben Seite von g_k liegen.

Bedeutet ε_k die positive oder negative Einheit, je nachdem die gleichbezifferte Coordinate des Ursprungs positiv oder negativ ist, so werden demnach die homogenen Coordinaten eines Punktes incl. Vorzeichen aus den orthogonalen abgeleitet durch die vier Gleichungen

$$x_k = \varepsilon_k \frac{1 - (a_k x + b_k y + c_k z)}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}}.$$

Löst man diese vier Gleichungen nach x, y, z auf, so lassen sich die Lösungen als homogene lineare Functionen der x_k darstellen.

Hiernach erfolgt die Transformation aus orthogonalen Systemen in homogene durch nicht-homogene lineare, die aus homogenen in orthogonale oder aus homogenen in homogene durch homogene lineare Substitutionen.

4. Bezeichnet A_k die g_k gegenüberliegende Tetraederecke, h_k die Höhe auf g_k, C_0 den Mittelpunkt, ϱ den Radius der vom Tetraeder umschlossenen eingeschriebenen Kugel, C_k den Mittelpunkt, ϱ_k den Radius der eingeschriebenen Kugel, welche g_k von Aussen berührt, S den Schwerpunkt des Tetraeders, so sind die homogenen Coordinaten

	x_1	x_2	x_3	x_4
für A_1:	h_1	0	0	0,
„ A_2:	0	h_2	0	0,
„ A_3:	0	0	h_3	0,
„ A_4:	0	0	0	h_4,
„ C_0;	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ,
„ C_1:	$-\varrho_1$	ϱ_1	ϱ_1	ϱ_1,
„ C_2:	ϱ_2	$-\varrho_2$	ϱ_2	ϱ_2,
„ C_3:	ϱ_3	ϱ_3	$-\varrho_3$	ϱ_3,
„ C_4:	ϱ_4	ϱ_4	ϱ_4	$-\varrho_4$,
„ S:	$\frac{1}{4}h_1$	$\frac{1}{4}h_2$	$\frac{1}{4}h_3$	$\frac{1}{4}h_4$.

5. Unter den homogenen Coordinaten einer Ebene versteht man die Quotienten u_k aus den Abständen der Ebene von den vier Ecken A_k eines Tetraeders und dem Abstande von einem willkürlich gewählten Fixpunkte C.

Man rechnet u_k positiv, wenn A_k und C auf derselben Seite der Ebene gelegen sind, im Gegenfalle negativ.

6. Bezeichnen u, v, w die orthogonalen Plancoordinaten der variabeln Ebene, α_k, β_k, γ_k die orthogonalen Coordinaten der Tetraederecke A_k, so sind unter Benutzung der Entwickelungen von 3) die homogenen Plancoordinaten aus den orthogonalen abgeleitet durch die vier Formeln

$$u_k = 1 - \alpha_k u - \beta_k v - \gamma_k w.$$

Löst man dieses System nach u, v, w, so erhält man homogene lineare Functionen der u_k; bildet man das System

$$0 = (1 - u_k) - \alpha_k u - \beta_k v - \gamma_k w,$$

so muss die Determinante desselben verschwinden.

Bezeichnet r_k die Coordinaten von C, so liefert diese Determinante die Gleichung

$$\Sigma g_k r_k u_k \equiv g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 = \Delta.$$

7. Je vier reelle Zahlen u_k, welche der Gleichung

$$\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$$

genügen, bestimmen eine Ebene eindeutig, deren Coordinaten sie sind.

Denn alle Ebenen, welche dieselbe Coordinate u_k besitzen, umhüllen den Punkt, der die Strecke $A_k C$ im Verhältniss $(-u_k)$ theilt, wenn man inneren Theilpunkten ein positives, äusseren ein negatives Theilverhältniss zuschreibt.

Die eindeutig bestimmte Ebene, welche $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$ in den Verhältnissen $(-u_1)$, $(-u_2)$, $(-u_3)$ theilt, hat u_1, u_2, u_3 zu auf A_1, A_2, A_3 bezogenen Coordinaten; da nun die gegebenen u_k die Gleichung $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$ erfüllen, so kann u_4 von der auf A_4 bezogenen Coordinate nicht verschieden sein, q. e. d.

8. Die in 6) aufgestellten Transformationsformeln lehren: Die Transformation aus einem homogenen System von Plancoordinaten zu einem orthogonalen erfolgt durch nicht homogene lineare Substitutionen; die reciproke Transformation, sowie die Transformation aus einem homogenen in ein anderes erfolgt durch homogene lineare Substitutionen.

9. Die Coordinaten der Tetraederflächen sind

	u_1	u_2	u_3	u_4
für g_1:	$\frac{h_1}{r_1}$	0	0	0,
„ g_2:	0	$\frac{h_2}{r_2}$	0	0,
„ g_3:	0	0	$\frac{h_3}{r_3}$	0,
„ g_4:	0	0	0	$\frac{h_4}{r_4}$.

§. 2.

Die Gleichung der Ebene und des Punktes.

1. Gleichung der Ebene. Transformirt man nach §. 1 aus dem orthogonalen in ein homogenes System, so geht die Gleichung der Ebene über in eine nicht homogene, lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten des variabeln Punktes. Multiplicirt man das Absolutglied derselben mit

$$\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4}{\Delta} \ (= 1),$$

so geht die Gleichung in die Form über:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Umgekehrt kann man jede solche Gleichung durch die reciproke Substitution in eine lineare Gleichung zwischen orthogonalen Coordinaten verwandeln. Hieraus folgt:

Die Gleichung einer jeden Ebene lässt sich als homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Punktcoordinaten darstellen, und jede homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Punktcoordinaten repräsentirt eine Ebene, die durch die vier Constanten derselben eindeutig bestimmt ist.

2. Die Ebene, welche die drei Punkte x_k', x_k'', x_k''' enthält, hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

3. Lehrsatz: Sind zwei Zahlen λ', λ'' so gewählt, dass

$$\lambda' + \lambda'' = 1,$$

und setzt man die Coordinaten x_i eines Punktes P aus den Coordinaten x'_i und x''_i zweier Punkte P' und P'' nach den vier Gleichungen zusammen

$$x_i = \lambda' x'_i + \lambda'' x''_i,$$

so liegt P auf der Geraden $P'P''$ und theilt $P'P''$ im Verhältniss

$$P'P : PP'' = \lambda'' : \lambda'.$$

Beweis. Aus $\lambda' + \lambda'' = 1$ folgt, dass die dem Satze gemäss bestimmten Strecken x_i in der That die Coordinaten eines Punktes sind, denn sie erfüllen die Gleichung $\Sigma g_i x_i = \Delta$.

Man wähle einen beliebigen Hülfspunkt Π mit den Coordinaten ξ_i; die Ebene $P'P''\Pi$ hat zur Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Derselben wird durch die Coordinaten von P genügt, denn

$$\begin{vmatrix} \lambda' x_1' + \lambda'' x_1'' & \lambda' x_2' + \lambda'' x_2'' & \lambda' x_3' + \lambda'' x_3'' & \lambda' x_4' + \lambda'' x_4'' \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Da Π willkürlich ist, so folgt hieraus, dass jede Ebene durch $P'P''$ zugleich P enthält; folglich liegt P auf $P'P''$.

Transformirt man in ein anderes homogenes System und haben $P'P''P$ in demselben die Coordinaten $X'_i\, X''_i\, X'''_i$, so ist nach §. 1, 3

$$X_i = \lambda' X'_i + \lambda'' X''_i.$$

Die Ableitungscoefficienten $\lambda'\lambda''$ sind demnach unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems, können also nur von der gegenseitigen Lage der drei Punkte abhängen.

Transformirt man nun in ein System, welches P' und P'' als Eckpunkte enthält, und sind die von P' und P'' auf die Gegenflächen gefällten Lothe beziehentlich h_1 und h_2, so sind die Coordinaten von $P'P''P$ in diesem System:

	x_1	x_2	x_3	x_4
für P':	h_1	0	0	0,
„ P'':	0	h_2	0	0,
„ P:	$\lambda' h_1$	$\lambda'' h_2$	0	0.

Demnach verhält sich

$$P'P : P'P'' : PP'' = \lambda'' : 1 : \lambda',$$

q. e. d.

Für jeden Punkt von $P'P''$ giebt es hiernach ein und nur ein Coefficientenpaar λ' und $\lambda'' = 1 - \lambda'$, durch welches seine Coordinaten aus denen von P' und P'' auf die hier durchgeführte Art abgeleitet werden können.

Wenn von vier Punkten P', P'', P''', P^{IV} die Coordinaten zweier derselben aus denen der anderen beiden durch Coefficienten λ', λ'', μ', μ'' abgeleitet werden nach

$$x_k''' = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$x_k^{IV} = \mu' x_k' + \mu'' x_k'', \quad \mu' + \mu'' = 1,$$

und es ist

$$\lambda' : \lambda'' = -(\mu' : \mu''),$$

so bilden die vier Punkte eine harmonische Reihe, und zwar sind die Paare $P'P''$ und $P'''P^{IV}$ harmonisch conjugirt.

4. Lehrsatz: Sind drei Zahlen λ', λ'', λ''' so gewählt, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1,$$

und leitet man die Coordinaten x_k eines Punktes P aus den Coordinaten x_k', x_k'', x_k''' dreier nicht in einer Geraden gelegenen Punkte P', P'', P''' durch die vier Gleichungen ab:

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'' + \lambda''' x''',$$

so liegt P auf der Ebene $P'P''P'''$ und ist das Centrum dreier in den Punkten $P^{(k)}$ wirkenden Parallelkräfte von beziehentlich $\lambda^{(k)}$ Einheiten, wobei ein Unterschied der Zeichen als Unterschied der Kraftrichtung zu deuten ist.

Beweis. Die Strecken x_k sind die Coordinaten eines Punktes, denn sie erfüllen $\Sigma g_k x_k = \Delta$.

Der durch sie bestimmte Punkt P liegt auf $P'P''P'''$, denn seine Coordinaten genügen der Gleichung dieser Ebene [2)].

Seien X_k X_k', X_k'', X_k''' die Coordinaten von $PP'P''P'''$ in einem andern homogenen Systeme, so werden, infolge der homogenen linearen Transformationsformeln die X_k aus den X_k', X_k'', X_k''' mit Hilfe derselben Coefficienten in derselben Weise abgeleitet, wie die x_k aus den x_k', x_k'', x_k'''. Die drei Ableitungscoefficienten können demnach nur von der gegenseitigen Lage der vier Punkte abhängen.

Sei Π der Punkt, welcher $P''P'''$ im Verhältniss $\lambda''' : \lambda''$ theilt,

so ist

$$\xi_k = \frac{\lambda'' x_k''}{\lambda'' + \lambda'''} + \frac{\lambda''' x_k'''}{\lambda'' + \lambda'''}$$

und

$$x_k = \lambda' x_k' + (\lambda'' + \lambda''')\, \xi_k.$$

Mithin theilt P die Strecke $P'\Pi$ im Verhältniss $(\lambda'' + \lambda''') : \lambda'$, q. e. d.

Jeder Punkt der Ebene $P'P''P'''$ kann demnach in dieser Art durch eine und nur eine Coefficientengruppe $\lambda'\lambda''\lambda'''$ abgeleitet werden.

5. Lehrsatz: Wählt man vier Zahlen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{\mathrm{IV}}$ so, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}} = 1,$$

so lassen sich die Coordinaten x_k jedes Punktes aus den Coordinaten $x_k', x_k'', x_k''', x_k^{\mathrm{IV}}$ von vier nicht in derselben Ebene gelegenen Punkten $P', P'', P''', P^{\mathrm{IV}}$ durch die vier Formeln ableiten:

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'' + \lambda''' x_k''' + \lambda^{\mathrm{IV}} x_k^{\mathrm{IV}}.$$

Der so bestimmte Punkt ist das Centrum von vier in den Punkten $P^{(k)}$ wirkenden Parallelkräften von beziehentlich $\lambda^{(k)}$ Einheiten.

Beweis. Die Strecken x_k erfüllen $\Sigma g_k x_k = \Delta$, sind also in der That vier Coordinaten eines Punktes.

Construirt man den Punkt Π nach den Formeln

$$\xi_k = \frac{1}{\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}}} (\lambda'' x_k'' + \lambda''' x_k''' + \lambda^{\mathrm{IV}} x_k^{\mathrm{IV}}),$$

so erhält man P aus P' und Π durch

$$x_k = \lambda' x_k' + (\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}})\, \xi_k.$$

Also theilt P die Strecke $P'\Pi$ im Verhältniss

$$P'P : P\Pi = (\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}}) : \lambda',$$

ist also das Centrum der Kraft λ' in P' und der in ihrem Centrum Π vereinten Kräfte λ'' in P'', λ''' in P''', λ^{IV} in P^{IV}, q. e. d.

6. Sind T' und T'' die Polynomien in den Gleichungen zweier Ebenen, und μ', μ'' zwei beliebige Zahlen, so geht die Ebene, deren Tetranom T aus T' und T'' nach der Formel zusammengesetzt wird:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'',$$

durch die Gerade $(T'T'')$, und umgekehrt.

Denn jeder Punkt, welcher die beiden Polynomien T' und T'' annullirt, erfüllt die Gleichung

$$T = 0.$$

7. Sind T', T'', T''' die Polynomien in den Gleichungen dreier, nicht dieselbe Gerade enthaltenden Ebenen, und μ', μ'', μ''' drei willkürliche Zahlen, so geht jede Ebene, deren Polynom T aus den gegebenen durch die Formel abgeleitet wird:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''',$$

durch die Ecke $T' T'' T'''$, und umgekehrt.

Denn der Punkt, für welchen zugleich $T' T'' T'''$ annullirt werden, erfüllt die Gleichung

$$T = 0.$$

Um die Umkehrungen von 6) und 7) zu beweisen, bemerke man zunächst, dass, wenn $T' T'' T'''$ dieselbe Gerade enthalten, für jede beliebige Wahl der μ doch immer nur eine Ebene erzielt wird, welche durch dieselbe Gerade geht.

Nimmt man an, das Polynom T irgend einer Ebene durch die Gerade $T' T''$, beziehentlich den Punkt $T' T'' T'''$ könne nicht nach 6), beziehentlich 7) dargestellt werden, so müsste also für jede Wahl von $\mu' \mu''$, beziehentlich $\mu' \mu'' \mu'''$ nur eine Darstellung von der Form möglich sein:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + R,$$

beziehentlich

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''' + R,$$

wobei R weder ein Vielfaches von $T' T'' T'''$, noch ein Aggregat solcher Vielfachen bedeutet, also für $T' = 0$ und $T'' = 0$, beziehentlich für $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$ nicht verschwindet. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, gemäss welcher T durch die Gerade $T' T''$, beziehentlich den Punkt $T' T'' T'''$ geht.

8. Lehrsatz: Sind $T' T'' T''' T^{\text{IV}}$ die Polynomien der Gleichungen von vier nicht denselben Punkt enthaltenden Ebenen, und $\mu' \mu'' \mu''' \mu^{\text{IV}}$ vier endliche reelle Zahlen, so kann das Polynom jeder beliebigen Ebene durch die Formel dargestellt werden:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T + \mu''' T''' + \mu^{\text{IV}} T^{\text{IV}},$$

und umgekehrt.

Denn wird das System $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$, $T^{\text{IV}} = 0$

durch kein Werthsystem x_k befriedigt, so ist die Determinante des Systems von Null verschieden. Ist nun

$$T^{(i)} \equiv a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + a_3^{(i)} x_3 + a_4^{(i)} x_4,$$

so sind die μ die Lösungen des Systems:

$$\mu' a_k' + \mu'' a_k'' + \mu''' a_k''' + \mu^{\mathrm{IV}} a_k^{\mathrm{IV}} = a_k;$$

dieses System giebt endliche reelle Werthe für die μ, da die Determinante desselben nicht verschwindet.

Zum Beweis der Umkehrung genügt die Bemerkung, dass T eine lineare Function der x_k, also $T = 0$ die Gleichung einer Ebene ist.

9. Gleichung des Punktes. Transformirt man die Gleichung eines Punktes in orthogonalen Plancoordinaten zu homogenen Plancoordinaten, so erhält man eine nicht homogene lineare Gleichung der u_k. Multiplicirt man das Absolutglied mit

$$\frac{g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4}{\Delta} (= 1),$$

so nimmt die Gleichung des Punktes die Form an:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Die reciproke Transformation lehrt, dass jede homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene einen Punkt darstellt.

Die Gleichung des Punktes lässt sich demnach als homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten der den Punkt enthaltenden Ebenen darstellen und umgekehrt.

10. Die Gleichung des Schnittpunktes dreier Ebenen $u_k' u_k'' u_k'''$ ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

11. Lehrsatz: Diejenige Ebene T, deren Coordinaten u_k aus den Coordinaten u_k' und u_k'' zweier Ebenen $T' T''$ nach den Formeln abgeleitet werden:

$$u_k \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

geht durch die Kante $T' T''$, und ihre Lage gegen T' und T'' wird durch die Coefficienten $\lambda' \lambda''$ eindeutig charakterisirt.

Die Coordinaten einer jeden Ebene durch die Kante $T' T''$ lassen sich aus denen von $T' T''$ auf diese Weise einmal und nur einmal darstellen.

Beweis. Die Coordinaten u_k genügen der Gleichung

$$\Sigma g_k r u_k = \Delta,$$

sind also in der That vier Coordinaten einer Ebene.

Wählt man eine willkürliche Hilfsebene T''' mit den Coordinaten u_k''', so geht T durch den Punkt $T'\,T''\,T'''$, denn unter den gemachten Voraussetzungen erfüllen die u_k die Gleichung dieses Punktes:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' & u_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Willkürlichkeit von T''' ergiebt sich, dass jeder T' und T'' gemeinsame Punkt zugleich der Ebene T angehört.

Transformirt man zu einem neuen Systeme, und sind hier die Coordinaten von $T\,T'\,T''$ beziehentlich U_k, U_k', U_k'', so gelten infolge der homogenen Substitutionen folgende Beziehungen:

$$U_k = \lambda' U_k' + \lambda'' U_k''.$$

Hieraus folgt, dass die Lage von T nicht vom Coordinatensystem, sondern nur von T', T'' und den Coefficienten λ', λ'' abhängt.

Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, wähle man ein Axentetraeder, in welchem g_1 auf T', g_2 auf T'' fällt und C positive Coordinaten hat.

Sind r, r_1, r_2 die Abstände des Fixpunktes von beziehentlich T, T', T'', so sind im neuen System die Coordinaten

	u_1	u_2	u_3	u_4
für T':	$\frac{h_1}{r_1}$	0	0	0,
„ T'':	0	$\frac{h_2}{r_2}$	0	0,
„ T:	$\frac{\lambda' h_1}{r_1}$	$\frac{\lambda'' h_2}{r_2}$	0	0.

Sind λ' und λ'' beide positiv, so werden demnach die dem Fixpunkte zugekehrten (d. i. positiven) Seiten der Ebenen $T'\,T''$ durch T nicht getrennt; ist $\lambda' > 1$, $\lambda'' < 0$, so geht T zwischen C und T' hindurch; ist $\lambda' < 0$, $\lambda'' > 1$, so geht T zwischen C und T'' hindurch.

In jedem Falle gilt zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, wenn mit u_k die Coordinaten von T bezeichnet werden

$$\sin T' T : \sin T' T'' = r u_2 : h_2 = \frac{\lambda''}{r_2} : 1,$$

$$\sin T'T'' : \sin TT'' = h_1 : r_1 u_1 = 1 : \frac{\lambda'}{r_1}$$

oder

$$\sin T'T : \sin TT'' = \frac{\lambda''}{r_2} : \frac{\lambda'}{r_1}.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die positiven Seiten zweier Ebenen einschliessen, als den inneren, sein Supplement als den äusseren Winkel, und bezieht man ein positives Verhältniss auf eine Theilung des inneren, ein negatives auf eine Theilung des äusseren Winkels, so gilt nun einschliesslich des Vorzeichens der Satz:

Die Ebene T theilt den Winkel $T'T''$ im Sinusverhältniss $-\left(\frac{\lambda''}{r_2} : \frac{\lambda'}{r_1}\right)$, d. i. so, dass

$$\sin T'T : \sin TT'' = -\left(\frac{\lambda''}{r_2} : \frac{\lambda'}{r_1}\right).$$

Wenn von vier Ebenen $T'T''T'''T^{IV}$ die Coordinaten zweier derselben aus denen der anderen beiden nach den Formeln abgeleitet werden:

$$u_k''' = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$u_k^{IV} = \mu' u_k' + \mu'' u_k'', \quad \mu' + \mu'' = 1,$$

und es ist

$$\frac{\lambda'}{r_1} : \frac{\lambda''}{r_2} = -\left(\frac{\mu'}{r_1} : \frac{\mu''}{r_2}\right),$$

d. i.:

$$\lambda' : \lambda'' = -(\mu' : \mu''),$$

so bilden die vier Ebenen ein harmonisches Büschel, und zwar sind die Paare $T'T''$ und $T'''T^{IV}$ harmonisch conjugirt.

12. Lehrsatz: Sind $u_k' u_k'' u_k'''$ die Coordinaten dreier nicht dieselbe Gerade enthaltenden Ebenen T' T'' T''' und leitet man hieraus u_k durch die Formeln ab:

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'' + \lambda''' u_k''', \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1,$$

so sind u_k die Coordinaten einer den Punkt T' T'' T''' enthaltenden Ebene. Die Coordinaten jeder Ebene durch T' T'' T''' lassen sich auf diese Weise und nur durch ein System der Coefficienten λ zusammensetzen.

Beweis: Die u_k genügen der Gleichung $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$, sind also die Coordinaten einer Ebene. Dieselbe enthält den Punkt $T'T''T'''$, denn ihre Coordinaten annulliren die [z. B. in Determinantenform nach 10) dargestellte] Gleichung des Punktes $T'T''T'''$.

Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, lege man die Ebene $\mathfrak{T}$ durch die Kanten $T'T$ und $T''T'''$; sie habe den Abstand $\mathfrak{r}$ von C und die Coordinaten $\mathfrak{u}_k$. Alsdann kann man die Zahlen $\lambda'\,\mu\,\lambda''\,\lambda'''$ immer und eindeutig so bestimmen, dass

a) $\quad sin\ T'T : sin\ T\mathfrak{T} = -\frac{\mu}{\mathfrak{r}} : \frac{\lambda'}{r_1}, \quad \lambda' + \mu = 1,$

b) $\quad sin\ T''\mathfrak{T} : sin\ \mathfrak{T}T''' = -\frac{\lambda'''}{r_3} : \frac{\lambda''}{r_2}, \quad \lambda'' + \lambda''' = \mu.$

Nach a) ist

$$u_k = \lambda' u_k' + \mu \mathfrak{u}_k,$$

nach b):

$$\mathfrak{u}_k = \frac{1}{\mu}(\lambda'' u_k'' + \lambda''' \mu_k'''),$$

also ist

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'' + \lambda''' u_k''',$$

q. e. d.

13. Lehrsatz: Sind $u_k' u_k'' u_k''' u_k^{\mathrm{IV}}$ die Coordinaten von vier nicht denselben Punkt enthaltenden Ebenen $T' T'' T''' T^{\mathrm{IV}}$, so lassen sich die Coordinaten u_k einer jeden Ebene T durch die Formeln und nur durch ein System der λ darstellen:

$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'' + \lambda''' u_k''' + \lambda^{\mathrm{IV}} u_k^{\mathrm{IV}}, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}} = 1.$

Beweis. Da $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$ erfüllt ist, so liefern die Formeln in der That die Coordinaten einer Ebene.

Man construire $\mathfrak{T}$ durch die Kante $T'\ T$ und den Punkt $T''\ T'''\ T^{\mathrm{VI}}$, ferner $\mathfrak{T}'$ durch $T''\mathfrak{T}$ und $T'''\ T^{\mathrm{IV}}$; $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ haben die Coordinaten $\mathfrak{u}_k \mathfrak{u}_k'$ und die Abstände $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ von C.

Man kann nun $\mu \mu' \lambda' \lambda'' \lambda''' \lambda^{\mathrm{IV}}$ immer und eindeutig so bestimmen, dass zugleich

a) $\quad sin\ T'T : sin\ T\mathfrak{T} = -\frac{\mu}{\mathfrak{r}} : \frac{\lambda'}{r_1}, \quad \lambda' + \mu = 1,$

b) $\quad sin\ T''\mathfrak{T} : sin\,\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = -\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_1} : \frac{\lambda''}{r_2}, \quad \lambda'' + \mu' = \mu,$

c) $\quad sin\ T'''\mathfrak{T}' : sin\,\mathfrak{T}\,T^{\mathrm{IV}} = -\frac{\lambda^{\mathrm{IV}}}{r_4} : \frac{\lambda'''}{r_2}, \quad \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}} = \mu'.$

Alsdann ist

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\mathrm{IV}} = 1$$

und

nach a): $u_k = \lambda' u_k' + \mu \mathfrak{u}_k,$

„ b): $\mathfrak{u}_k = \frac{1}{\mu}(\lambda'' u_k'' + \mu' \mathfrak{u}_k'),$

„ c): $\mathfrak{u}_k' = \frac{1}{\mu'}(\lambda''' u_k''' + \lambda^{\mathrm{IV}} u_k^{\mathrm{IV}}),$

also

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'' + \lambda''' u_k''' + \lambda^{\mathrm{IV}} u_k^{\mathrm{IV}},$$

q. e. d.

14. Lehrsatz: Sind $P' P''$ die linken Seiten der Gleichungen zweier Punkte $P' P''$, und bildet man mit den Zahlen $\mu' \mu''$ das Binom

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'',$$

so liegt der Punkt $P = 0$ auf der Geraden $P' P''$.

Denn alle Ebenen, deren Coordinaten P' und P'' annulliren, erfüllen auch $P = 0$.

15. Lehrsatz: Sind $P' P'' P'''$ die linken Seiten der Gleichungen dreier nicht in derselben Geraden gelegenen Punkte und bildet man das Trinom

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''',$$

so ist $P = 0$ die Gleichung eines Punktes der Ebene $P' P'' P'''$.

Denn die Coordinaten dieser Ebene erfüllen zugleich

$$P' = 0, \quad P'' = 0, \quad P''' = 0, \quad \text{also auch } P = 0.$$

16. Lehrsatz: Die linke Seite der Gleichung jedes Punktes der Geraden $P' P''$ lässt sich in der in 14), die Gleichung jedes Punktes der Ebene $P' P'' P'''$ in der in 15) angegebenen Weise ableiten.

Der Beweis erfolgt ganz analog dem in 7) für Ebenengleichungen gegebenen.

17. Lehrsatz: Sind $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ die linken Seiten der Gleichungen von vier nicht in derselben Ebene enthaltenen Punkten, so lassen sich für jeden Punkt P im Raume vier Zahlen $\mu' \mu'' \mu''' \mu^{\text{IV}}$ so finden, dass

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''' + \mu^{\text{IV}} P^{\text{IV}}.$$

Beweis. Soll diese Darstellung möglich sein, so müssen die μ das System von vier linearen Gleichungen erfüllen:

$$\mu' \alpha_k' + \mu'' \alpha_k'' + \mu''' \alpha_k''' + \mu^{\text{IV}} \alpha^{\text{IV}} = \alpha_k.$$

Dieses System liefert endliche eindeutige Werthe für μ, da die Determinante desselben nicht verschwindet.

18. Es giebt bei dieser Coordinatenbestimmung eine und nur eine Ebene, deren Punkte sämmtlich unendlich fern sind.

Die Coordinaten dieser unendlich fernen Ebene T_∞ sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1.$$

Um die Gleichung von T_∞ zu bestimmen, benutze man den Umstand,

dass die unendlich ferne Ebene mit je zwei willkürlichen Ebenen einen unendlich fernen Schnittpunkt liefert. Sind $T' = 0$, $T'' = 0$ die Gleichungen zweier willkürlichen Ebenen, und ist

$$T_\infty \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0,$$

so muss also das System

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 &= 0, \\ a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_4' x_4 &= 0, \\ a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4 &= 0, \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 &= \Delta \end{aligned}$$

lauter unendliche Auflösungen liefern; folglich muss die Determinante dieses Systems verschwinden. Bei der Willkürlichkeit von a_k' und a_k'' ist dies nur dann möglich, wenn

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = g_1 : g_2 : g_3 : g_4.$$

Die Gleichung der unendlich fernen Ebene ist demnach:

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = 0.$$

19. Sind die Ebenen $T = 0$, $T' = 0$ parallel, so unterscheiden sich ihre in geeigneter Weise erweiterten linken Seiten nur durch ein Vielfaches von T_∞; denn es geht alsdann T durch den Schnitt $T' T_\infty$, also lässt sich T unter der Form darstellen:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T_\infty,$$

q. e. d.

Enthält überdies T einen gegebenen Punkt x_k', so ist

$$-\mu' : \mu'' = \Delta : a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3' + a_4' x_4'.$$

Die Bedingung dafür, dass drei Ebenen $T' T'' T'''$ derselben Geraden parallel sind, ist das Verschwinden der Determinante des Systems

$$T' = 0, \quad T'' = 0, \quad T''' = 0, \quad T_\infty = 0,$$

d. i.:

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & a_4'' \\ a_1''' & a_2''' & a_3''' & a_4''' \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Gleichung eines unendlich fernen Punktes. Sei

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes, so muss derselben durch die Coordinaten der unendlich fernen Ebene, nämlich durch

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$$

genügt werden. Hieraus folgt die Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

21. Da es bei dieser Coordinatenbestimmung nur eine unendlich ferne Ebene giebt, die durch eine Gleichung und durch eine Coordinatengruppe eindeutig bestimmt ist, nämlich durch die Gleichung

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = 0$$

und durch die Coordinaten

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1,$$

so folgt, dass man hier alle unendlich fernen Punkte in einer Ebene liegend anzunehmen hat.

§. 3.

Vermischte Aufgaben über Punkt und Ebene.

1. Bestimmung der Coordinaten einer Ebene T aus der Gleichung $T = 0$ der Ebene.

Sei (T) der Werth, den T erlangt, wenn man die Coordinaten eines nicht in T enthaltenen Punktes hineinsetzt. Dieser Werth ändert sich beim Uebergange zu einem andern Systeme nicht. Werde nun beim Uebergang in ein System, welches T als Tetraederfläche mit enthält, die Gleichung von T transformirt zu

$$T \equiv A x_1 = 0,$$

so folgt, wenn ξ den Abstand eines Punktes P' von T bedeutet:

a) $$A\xi = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4'.$$

Dabei fällt ξ für alle Punkte auf der einen Seite von T positiv, für die jenseitigen negativ aus.

Wendet man a) auf die Ecken des ursprünglichen Coordinatentetraeders und den Fixpunkt an, so erhält man

$$\begin{aligned} Aru_1 &= a_1 h_1, \\ Aru_2 &= a_2 h_2, \\ Aru_3 &= a_3 h_3, \\ Aru_4 &= a_4 h_4, \\ Ar &= a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4; \end{aligned}$$

hieraus folgen die Coordinaten der Ebene

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

zu

$$u_k = \frac{a_k h_k}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4}.$$

2. **Bestimmung der Entfernung eines Punktes P' von einer Ebene T aus den Coordinaten x'_k des Punktes und der Gleichung**

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

der Ebene.

Zu dieser Rechnung benutzt man die Plücker'schen homogenen Coordinaten der Ebene. Dieselben sind die Abstände $\mathfrak{u}_k$ der Ebene von den Tetraederecken; ihre Vorzeichen werden so bestimmt, wie die der hier verwendeten Plancoordinaten. Die $\mathfrak{u}_k$ werden demnach aus den orthogonalen Coordinaten durch die vier Formeln abgeleitet:

$$\mathfrak{u}_k = \frac{1 - \alpha_k u + \beta_k v + \gamma_k w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Bezeichnet γ_{ik} den von g_i und g_k eingeschlossenen Tetraederwinkel, so folgt aus diesem System die Gleichung, welche die vier Plücker'schen Coordinaten jeder Ebene erfüllen, zu

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1^2 g_1^2 + \mathfrak{u}_2^2 g_2^2 + \mathfrak{u}_3^2 g_3^2 + \mathfrak{u}_4^2 g_4^2 - 2\,\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 g_1 g_2 \cos\gamma_{12} \\ &- 2\,\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_3 g_1 g_3 \cos\gamma_{13} - 2\,\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_4 g_1 g_4 \cos\gamma_{14} - 2\,\mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 g_2 g_3 \cos\gamma_{32} \\ &- 2\,\mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_4 g_2 g_4 \cos\gamma_{24} - 2\,\mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_4 g_3 g_4 \cos\gamma_{34} = \Delta^2. \end{aligned}$$

Da $r u_k = \mathfrak{u}_k$, so folgt aus 1):

$$\mathfrak{u}_k = a_k h_k : A.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der $\mathfrak{u}_k$ ein, so liefert dieselbe:

$$\begin{aligned} &a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2\,a_1 a_3 \cos\gamma_{12} - 2\,a_1 a_3 \cos\gamma_{13} \\ &- 2\,a_1 a_4 \cos\gamma_{14} - 2\,a_2 a_3 \cos\gamma_{23} - 2\,a_2 a_4 \cos\gamma_{24} \\ &- 2\,a_3 a_4 \cos\gamma_{34} = A^2. \end{aligned}$$

Man wähle für A die positive oder negative Wurzel, je nachdem

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4 \gtrless 0;$$

alsdann ist

$$\xi = \frac{a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4'}{A}$$

der Abstand des Punktes P' von T; er wird positiv für alle Punkte, welche mit C auf derselben Seite von T liegen; im Gegenfalle negativ.

Erweitert man die Gleichung einer Ebene mit $\frac{1}{A}$, so geht dieselbe in eine neue Form über:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

in welcher $A = 1$ ist. Diese Form mag als Normalform der Gleichung der Ebene bezeichnet werden.

Ist demnach $T = 0$ die Normalform der Gleichung der Ebene T, so ist der Abstand des Punktes P' von T:

$$\xi = a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4'.$$

3. Transformationsgleichungen zum Uebergange aus einem System homogener Punktcoordinaten in ein anderes.

Seien $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$, $T^{IV} = 0$ die Gleichungen der neuen Coordinatenebenen in Normalform; sei ferner $\varepsilon_k = \pm 1$, je nachdem die Coordinate r_k von C im neuen System $\gtrless 0$ ist, so erhält man (einschliesslich der Vorzeichen) die Transformationsformeln als die Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \varepsilon_1 (a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_4' x_4),\\
\xi_2 &= \varepsilon_2 (a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4),\\
\xi_3 &= \varepsilon_3 (a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3 + a_4''' x_4),\\
\xi_4 &= \varepsilon_4 (a_1^{IV} x_1 + a_2^{IV} x_2 + a_3^{IV} x_3 + a_4^{IV} x_4).
\end{aligned}$$

4. Bestimmung der Coordinaten eines Punktes aus der Gleichung $P = 0$ desselben.

Setzt man in $P = 0$ die Coordinaten einer nicht durch P gehenden Ebene T' ein, so erhält das Polynom P einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man in ein anderes homogenes System, so bleibt der Werth unverändert, sobald man in die transformirte Gleichung des Punktes P die transformirten Coordinaten der Ebene T' setzt.

Wählt man nun P als Tetraedereckpunkt (A_1) im neuen System, und hat T' den Abstand ξ von P und r' von C, so ist die Gleichung von P im neuen System

$$A u_1 = 0.$$

Demnach ist

$$A \frac{\xi}{r'} = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' + \alpha_4 u_4'.$$

Wendet man diese Formel auf die vier Tetraederebenen an, so erhält man die vier Formeln

$$A \frac{x_k}{r_k} = \alpha_k \frac{h_k}{r_k} \text{ oder } A x_k = \alpha_k h_k.$$

Setzt man die hieraus resultirenden x_k in die Gleichung

$$\Sigma g_k x_k = \Delta,$$

so erhält man

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Mithin sind die Coordinaten des Punktes P:

$$x_k = \frac{\alpha_k h_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}.$$

5. Bestimmung des Abstandes eines Punktes P von einer Ebene T' aus der Gleichung $P = 0$ des Punktes und den Coordinaten u_k' der Ebene.

Die Entwickelungen in 4) liefern diese Entfernung ξ zu

$$\xi = \frac{r'}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \alpha_3 u_3' + \alpha_4 u_4).$$

Um r aus den homogenen Coordinaten zu bestimmen, benutze man

$$\mathfrak{u}_k = r\,u_k$$

und die Gleichung zwischen den Plücker'schen Coordinaten einer Ebene. Man erhält:

$$r^2 = \Delta^2 : \left\{\begin{array}{l} u_1^2 g_1^2 + u_2^2 g_2^2 + u_3^2 g_3^2 + u_4^2 g_4^2 - 2u_1 u_2 g_1 g_2 \cos\gamma_{12} \\ - 2u_1 u_3 g_1 g_3 \cos\gamma_{13} - 2u_1 u_4 g_1 g_4 \cos\gamma_{14} - 2u_2 u_3 g_2 g_3 \cos\gamma_{23} \\ - 2u_2 u_4 g_2 g_4 \cos\gamma_{24} \cos\gamma_{24} - 2u_3 u_4 g_3 g_4 \cos\gamma_{34} \end{array}\right\}.$$

Man nimmt für r die positive Wurzel der rechten Seite dieser Gleichung.

Wendet man diese allgemeine Formel zur Berechnung des r' aus u_k' an, so erhält man ξ vollständig durch u_k' ausgedrückt.

6. Normalform der Gleichung eines Punktes. Es erscheint zweckmässig, die Gleichung eines Punktes mit

$$\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

zu erweitern. Die resultirende Gleichung heisse die Normalform der Gleichung des Punktes.

Ist demnach

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung von P in Normalform, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1.$$

Die Normalform einer in beliebig erweiterter Form gegebenen Gleichung eines Punktes lautet:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_3 + \frac{\alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_4 = 0.$$

Ist $P = 0$ die Gleichung von P in Normalform, so sind die Coordinaten von P:

$$x_k = \alpha_k h_k.$$

7. Transformationsgleichungen zum Uebergange aus einem homogenen System in ein anderes.

Es seien die Gleichungen der Eckpunkte des neuen Systems in Normalform gegeben, und zwar habe der neue Eckpunkt A_k die Gleichung

$$\alpha_1^{(k)} u_1 + \alpha_2^{(k)} u_2 + \alpha_3^{(k)} u_3 + \alpha_4^{(k)} u_4 = 0.$$

Sind U_k die Plancoordinaten im neuen System, so sind die Transformationsformeln die Lösungen des linearen Systems:

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 + \alpha_4' u_4, \\ U_2 &= \alpha_1'' u_1 + \alpha_2'' u_2 + \alpha_3'' u_3 + \alpha_4'' u_4, \\ U_3 &= \alpha_1''' u_1 + \alpha_2''' u_2 + \alpha_3''' u_3 + \alpha_4''' u_4, \\ U_4 &= \alpha_1^{IV} u_1 + \alpha_2^{IV} u_2 + \alpha_3^{IV} u_3 + \alpha_4^{IV} u_4. \end{aligned}$$

8. Ist

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

die Gleichung einer Ebene in Normalform, und sind $\mathfrak{u}_k$ die Plücker'schen Coordinaten derselben, so ist nach 1)

$$\mathfrak{u}_k = a_k h_k, \text{ also } a_k = \frac{\mathfrak{u}_k}{h_k},$$

mithin geht die Normalform der Gleichung der Ebene über in

$$\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} x_1 + \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} x_2 + \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} x_3 + \frac{\mathfrak{u}_4}{h_4} u_4 = 0.$$

Ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Normalform der Gleichung eines Punktes, und sind x_k dessen Coordinaten, so ist nach 6):

$$x_k = \alpha_k h_k, \text{ also } \alpha_k = \frac{x_k}{h_k};$$

die Gleichung des Punktes in Normalform lässt sich also auch schreiben:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1 + \frac{x_2}{h_2} u_2 + \frac{x_3}{h_3} u_3 + \frac{x_4}{h_4} u_4 = 0.$$

9. Berechnung des Volumen, der Flächen und der Höhen eines Tetraeders aus den Coordinaten der Eckpunkte.

Unter der Determinante des Tetraeders $P' P'' P''' P^{IV}$ werde verstanden

$$TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}}) \equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{\text{IV}} & x_2^{\text{IV}} & x_3^{\text{IV}} & x_4^{\text{IV}} \end{vmatrix}.$$

Es ist

$$TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}}) = \pm\, TD(P^{(i)} P^{(k)} P^{(l)} P^{(m)}),$$

je nachdem der Perimeter $P^{(k)} P^{(l)} P^{(m)}$ nach der Reihenfolge der Bezeichnung von $P^{(i)}$ aus gesehen in derselben oder der entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird, als der Perimeter $P'' P''' P^{\text{IV}}$ von P' aus gesehen *).

Lehrsatz: Die Tetraederdeterminante $TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}})$ hat dann und nur dann ein positives oder negatives Vorzeichen, wenn das Tetraeder $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ mit dem Axentetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ gleichen oder beziehentlich entgegengesetzten Sinnes ist, d. i. wenn die Perimeter $P'' P''' P^{\text{IV}}$ und $A_2 A_3 A_4$ von P', beziehentlich A_1 aus gesehen in derselben oder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

Beweis: Setzt man an die Stelle der Coordinaten $x_k^{(\alpha)}$ des Punktes $P^{(\alpha)}$, wenn $P^{(\alpha)}$ einen beliebigen der vier Punkte $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ bezeichnet, die Coordinaten $x_k^{(\mu)}$ eines willkürlichen andern Punktes

---

*) Für den Fall $i = 1$ ist die Bemerkung ohne Weiteres erwiesen. Ist i von 1 verschieden, so hat die Reihe $k\,l\,m$ mit $2\,3\,4$ zwei Nummern gemein. Man vertausche $k\,l\,m$ und $2\,3\,4$ cyklisch, so dass die gemeinsamen Nummern in die beiden ersten Stellen kommen; es gehe $k\,l\,m$ in $n\,p\,q$, $2\,3\,4$ in $a\,b\,c$ über. Alsdann werden die Perimeter $P^{(n)} P^{(p)} P^{(q)}$ und $P^{(a)} P^{(b)} P^{(c)}$ von $P^{(i)}$, beziehentlich P' aus gesehen in derselben Richtung durchlaufen, wie $P^{(k)} P^{(l)} P^{(m)}$, beziehentlich $P'' P''' P^{\text{IV}}$, und es ist zugleich

$$TD(P^{(i)} P^{(k)} P^{(l)} P^{(m)}) = TD(P^{(i)} P^{(n)} P^{(p)} P^{(q)}),$$
$$TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}}) = TD(P' P^{(a)} P^{(b)} P^{(c)}).$$

Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $\qquad a = n, \quad b = p;$

b) $\qquad a = p, \quad b = n.$

In dem ersten Falle sind die Perimter $P^{(k)} P^{(l)} P^{(m)}$ und $P'' P''' P^{\text{IV}}$, von $P^{(i)}$, beziehentlich P' aus gesehen, entgegengesetzten Sinnes, in dem letzten Falle gleichen Sinnes.

Im ersten Falle geht die Reihe $i\,n\,p\,q$ durch die Vertauschung von i gegen q in die Reihe $1\,a\,b\,c$ über; im zweiten geht $i\,n\,p\,q$ durch Vertauschung von n gegen p in $i\,a\,b\,q$ und diese durch Vertauschung von i gegen q in $1\,a\,b\,c$ über. Demnach ist $i\,n\,p\,q$ und mithin auch $i\,k\,l\,m$ im ersten Falle eine ungerade, im letzten eine gerade Permutation von $1\,2\,3\,4$.

$P^{(\mu)}$, so hat die neue Tetraederdeterminante dasselbe oder ein anderes Vorzeichen als die ursprüngliche, je nachdem $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\mu)}$ auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die drei übrigen Punkte gelegten Ebene liegen. Dies tritt stets und nur dann ein, wenn der von den drei übrigen Punkten gebildete Perimeter von $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\mu)}$ aus gesehen bei derselben Reihenfolge der Punkte in gleicher oder entgegengesetzter Drehrichtung durchlaufen wird.

Ersetzt man hiernach die vier Ecken $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ durch die Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$, so haben die Determinanten der beiden Tetraeder gleiches Zeichen, wenn der Sinn des Tetraeders $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ bei den Substitutionen sich gar nicht oder zweimal oder viermal geändert hat; dann heben sich aber die Aenderungen paarweise auf; — oder die Determinanten haben verschiedene Zeichen, wenn sich der Sinn des Tetraeders bei den Substitutionen einmal oder dreimal geändert hat; dann sind $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ und $A_1 A_2 A_3 A_4$ entgegengesetzten Sinnes. Da nun

$$TD(A_1 A_2 A_3 A_4) = h_1 h_2 h_3 h_4 \quad (\text{also} > 0),$$

so folgt, dass

$$TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}}) \gtrless 0,$$

je nachdem $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ und $A_1 A_2 A_3 A_4$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind, q. e. d.

Das Volumen eines Tetraeders wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem dasselbe mit dem Axentetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ gleichen Sinnes ist, oder nicht.

10. Die Gleichungen der Ebenen des Tetraeders $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ mögen geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{\text{IV}} & x_2^{\text{IV}} & x_3^{\text{IV}} & x_4^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{\text{IV}} & x_2^{\text{IV}} & x_3^{\text{IV}} & x_4^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{\text{IV}} & x_2^{\text{IV}} & x_3^{\text{IV}} & x_4^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man abkürzend $TD(P' P'' P''' P^{\text{IV}}) \equiv D$, die Höhen des Tetraeders $P' P'' P''' P^{\text{IV}}$ mit $H_1 H_2 H_3 H_4$, die Seitenflächen mit $G_1 G_2 G_3 G_4$, bezeichnet man ferner die Multiplicatoren, welche die vier Gleichungen auf die Normalform bringen, mit $a_1 a_2 a_3 a_4$ und bedeutet ε_k die positive oder negative Einheit, je nachdem $P^{(k)}$ auf

der positiven oder negativen Seite der Ebene durch die drei anderen Punkte liegt, so ist

$$H_1 \varepsilon_1 a_1 = H_2 \varepsilon_2 a_2 = H_3 \varepsilon_3 a_3 = H_4 \varepsilon_4 a_4 = D.$$

Setzt man $\varepsilon_k a_k = \lambda_k G_k,$

so erhält man $\lambda_k G_k H_k = D;$

oder, wenn V den absoluten Werth des dreifachen Tetraedervolumens V bezeichnet:

$$D = \lambda_k \mathrm{V}.$$

Wendet man diese Formeln für $k = 1, 2, 3, 4$ an, so erhält man

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4.$$

Man hat daher, wenn der gemeinschaftliche Werth der λ_k mit λ bezeichnet wird, die Formeln:

$$\varepsilon_k a_k = \lambda G_k, \quad D = \lambda \mathrm{V}.$$

Man ersetze nun irgend einen der vier Eckpunkte, z. B. $P^{(\alpha)}$, durch einen (sonst willkürlichen) neuen Punkt $\Pi^{(\alpha)}$, der so gelegen ist, dass das neue Tetraeder mit dem gegebenen gleichen Sinnes ist. Unterscheidet man die auf das neue Tetraeder bezüglichen Grössen durch Accente, so ist $a_\alpha = a'_\alpha$, $G_\alpha = G'_\alpha$, weil a_α und G_α von $P^{(\alpha)}$ unabhängig sind; ferner ist $\varepsilon_\alpha = \varepsilon'_\alpha$, da wegen des gleichen Sinnes der Tetraeder die Punkte $P^{(\alpha)} \Pi^{(\alpha)}$ auf derselben Seite der Ebene durch die drei übrigen Punkte liegen. Da nun im neuen Tetraeder

$$\varepsilon'_\alpha a'_\alpha = \lambda' G'_\alpha,$$

und $\varepsilon_\alpha = \varepsilon'_\alpha, \quad a_\alpha = a'_\alpha, \quad G_\alpha = G'_\alpha,$

so ergiebt sich

a) $\lambda = \lambda',$

also auch $D' = \lambda \mathrm{V}',$ oder:

b) $D : D' = \mathrm{V} : \mathrm{V}'.$

Wählt man hingegen den Ersatzpunkt $P^{(\alpha)}$ so, dass das neue Tetraeder mit dem gegebenen nicht gleichsinnig ist, so ist für das neue Tetraeder wieder $a_\alpha = a'_\alpha$, $G_\alpha = G'_\alpha$, aber $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon'_\alpha$, da nach der neuen Voraussetzung $P^\alpha \Pi^\alpha$ auf verschiedenen Seiten der Gegenfläche liegen. Aus

$$\varepsilon'_\alpha a'_\alpha = \lambda' G'_\alpha$$

folgt jetzt

c) $\lambda' = -\lambda,$

und hieraus $D' = -\lambda V'$, oder:

d) $D : D' = \mathrm{V} : -\mathrm{V}'.$

Da nun in b) wegen der gleichen Vorzeichen von V und V' die Verhältnisse $\mathrm{V} : \mathrm{V}'$ und $V : V'$, und in d) wegen der ungleichen Vorzeichen von V und V' die Verhältnisse $\mathrm{V} : -\mathrm{V}'$ und $V : V'$

auch incl. Vorzeichen übereinstimmen, so kann man die beiden Resultate b) und d) zu der Proportion vereinigen:

e) $$D : D' = V : V'.$$

Ersetzt man nun die Punkte eines Tetraeders T mit der Determinante D und dem Volumen V der Reihe nach durch die Punkte eines andern Tetraeders T' mit der Determinante D' und dem Volumen V', so erhält man durch wiederholte Anwendung von e) die nun für irgend zwei Tetraeder gültige Proportion

f) $$D : D' = V : V'.$$

Hiernach verhalten sich die Tetraederdeterminanten zu einander wie die Volumina ihrer Tetraeder, wenn man die Volumina positiv oder negativ rechnet, je nachdem die Tetraeder mit dem Axentetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ gleichen Sinnes sind oder nicht.

Nimmt man für T' das Axentetraeder, so erhält man:

$$TD(P' P'' P''' P^{IV}) : h_1 h_2 h_3 h_4 = V : \varDelta;$$

also folgt das dreifache Volumen V des Tetraeders $P' P'' P''' P^{IV}$ zu

$$V = \frac{\varDelta}{h_1 h_2 h_3 h_4} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}.$$

Ferner folgt

$$\lambda = \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{\varDelta}.$$

Die zweite Potenz des Erweiterungscoefficienten der Ebenengleichung

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0$$

folgt, wenn man die Coefficienten der Glieder der ersten Zeile mit $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$ bezeichnet, zu

$$a_4^2 = \\ 1 : (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 - 2\,\delta_1 \delta_2 \cos\gamma_{12} - 2\,\delta_1 \delta_3 \cos\gamma_{13} - \delta_1 \delta_4 \cos\gamma_{14} \\ - 2\,\delta_2 \delta_3 \cos\gamma_{23} - 2\,\delta_2 \delta_4 \cos\gamma_{24} - \delta_3 \delta_4 \cos\gamma_{34}).$$

Nimmt man für a die positive Wurzel und rechnet alle Flächen positiv, so folgt für den Inhalt des Dreiecks $P' P'' P'''$:

$$P' P'' P''' = \frac{\varDelta}{h_1 h_2 h_3 h_4} \cdot a_4.$$

ür die Höhen des Tetraeders erhält man

$$H_k = \frac{\varepsilon_k}{a_k} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \\ x_1^{IV} & x_2^{IV} & x_3^{IV} & x_4^{IV} \end{vmatrix}.$$

11. Berechnung des Winkels zwischen zwei Ebenen. n die Formeln für den Cosinus des Winkels zweier Ebenen in escartes'schen Coordinaten der Ebenen substituire man die escartes'schen Coordinaten durch die homogenen Plancoordinaten. Man erhält dann nach einigen nicht schwierigen Transforationen folgendes Resultat:

Sind u_k, u_k' die Coordinaten zweier Ebenen T und T', sowie r nd r' ihre Abstände vom Fixpunkte, so ist

$$\cos \widehat{TT'} = -\frac{rr'}{\Delta^2}[u_1u_1'g_1^2 + u_2u_2'g_2^2 + u_3u_3'g_3' + u_4u_4'g_4'$$
$$-(u_1u_2' + u_2u_1')g_1g_2\cos\gamma_{12} - \cdots - (u_3u_4' + u_4u_3')g_3g_4\cos\gamma_{34}].$$

$\widehat{TT'}$ ist hier der Winkel, welchen die dem Fixpunkte zugewandten Seiten von T und T' begrenzen.

§. 4.

Sätze über Flächen zweiten Grades.

1. Die Gleichung jeder Curve n^{ten} Grades kann als homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den homogenen Coordinaten des variabeln Punktes, beziehentlich der variabeln Ebene dargestellt werden.

Denn man transformire durch die §. 1 aufgestellten Gleichungen, so gehen die nichthomogenen Gleichungen in orthogonalen Coordinaten zunächst in nichthomogene Gleichungen in homogenen Punkt-, beziehentlich Plancoordinaten über. Jedes Glied der Gleichung, dessen Grad um δ Einheiten niedriger ist, als der Grad der Gleichung, multiplicire man mit

$$\left(\frac{g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4}{\Delta}\right)^\delta$$

in Gleichungen für Punktcoordinaten, oder beziehentlich

$$\left(\frac{g_1r_1u_1 + g_2r_2u_2 + g_3r_3u_3 + g_4r_4u_4}{\Delta}\right)^\delta$$

in Gleichungen für Plancoordinaten.

Die reciproke Transformation lehrt, dass jeder Gleichung n^{ten} Grades zwischen den homogenen Coordinaten auf eine Gleichung desselben Grades zwischen Descartes'schen Coordinaten reducirt werden kann. Es werden also alle Gebilde n^{ten} Grades und nur diese umfasst, wenn die geometrischen Repräsentanten der homogenen Gleichungen n^{ten} Grades zwischen homogenen Punkt- und Plancoordinaten untersucht werden.

2. Bezieht man eine Fläche auf ein Coordinatentetraeder mit einer unendlich fernen Fläche (g_4), so wird für im Endlichen liegende Gebilde die Coordinate x_4 eine unendliche Constante. Untersucht man solche Gebilde, deren Gleichungen in Punktcoordinaten unendlich grosse Coefficienten enthalten, nicht nach ihren Punktgleichungen, so werden im allgemeinen Falle die Potenzen von x_4 mit den Coefficienten der betreffenden Glieder zu endlichen Constanten verschmelzen. Die Gleichung geht alsdann in eine Gleichung zwischen den unter sich unabhängigen Abständen des variabeln Punktes von den drei Seiten einer Ecke, d. i. zwischen den Descartes'schen Punktcoordinaten, über.

Die Gleichungen in Plancoordinaten erleiden, wenn drei Ecken des Tetraeders unendlich fern sind, folgende Veränderung:

Seien $l_1 l_2 l_3$ die Längen der (unendlich grossen) Kanten $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$. Man lege zur variabeln Ebene T eine Parallelebene T' durch A_4. Dieselbe hat von T den Abstand $r u_4$, von $A_1 A_2 A_3$ beziehentlich $r u_1, r u_2, r u_3$. T schneide auf den Kanten $A_4 A_1$, $A_4 A_2, A_4 A_3$, von A_4 aus gerechnet, die Strecken $\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}$ ab, und zwar werden dieselben positiv nach g_4 zu gerechnet. Alsdann ist

$$u_4 l_1 u = u_1, \quad u_4 l_2 v = u_2, \quad u_4 l_3 w = u_3.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung einer Fläche, und beschränkt man sich darauf, solche Flächengleichungen in Plancoordinaten zu untersuchen, die keine unendlich grossen Coefficienten enthalten, so verschmelzen im allgemeinen Falle die $l_1 l_2 l_3$ mit den betreffenden Coefficienten zu endlichen Constanten; die allen Gliedern gemeinsame Potenz von u_4 werde beseitigt. Alsdann verbleibt als Gleichung der Fläche eine nichthomogene Gleichung zwischen den Reciproken der Axenabschnitte der veränderlichen Ebene, d. h. zwischen den gewöhnlichen Plancoordinaten.

3. Flächengleichung in Plancoordinaten in Bezug auf ein Tetraeder mit einer unendlich fernen Ecke A_4.

Die variable Ebene schneide von den Kanten $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ von $A_1 A_2 A_3$ an gerechnet die Strecken $v_1 v_2 v_3$ ab; von A_4 aus ge

rechnet schneiden alle variablen Ebenen auf allen drei Kanten ein und dieselbe unendlich grosse Strecke v_4 ab. Da nun

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = v_1 : v_2 : v_3 : v_4,$$

wenn die v_k mit gleichen Zeichen gerechnet werden, welche auf derselben Seite der variabeln Ebene liegen, so kann man in der homogenen Gleichung der Ebene die u_k durch die v_k ersetzen. Beschränkt man sich auf die Untersuchung solcher Gleichungen in Plancoordinaten, die keine unendlich grossen Coefficienten enthalten, so verschmelzen im Allgemeinen in den Gliedern, welche v_4 enthalten, die Potenzen dieser Coordinate mit den Coefficienten zu endlichen Constanten. Die Gleichung der Fläche geht demnach in eine nicht homogene Gleichung zwischen den von drei willkürlichen Nullpunkten an gerechneten Abschnitten der variabeln Ebene auf drei parallelen gleichgerichteten Geraden über.

Für Flächengleichungen in Punktcoordinaten verändert sich für den Fall einer unendlich fernen Ecke des Coordinatentetraeders nur die Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten. In dieselbe gehen nur die Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3$ ein. Seien Δ die doppelte Fläche, $g_1'\, g_2'\, g_3'$ die auf den gleichbezeichneten Tetraederflächen gelegenen Seiten des Normalschnitts durch die nach A_4 gehenden drei Ebenen, so ist

$$g_1' x_1 + g_2' x_2 + g_3' x_3 = \Delta.$$

4. Gleichung der Tangentialebene an einen Punkt P' einer Fläche $f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$.

Bezeichnen d_k und δ_k zwei solche Variationen der Coordinaten von P', dass die Punkte $x_k + d_k$ und $x_k + \delta_k$ auf $f = 0$ gelegen sind, so ist die Gleichung der Tangentialebene die Grenze, welcher sich die Gleichung der durch x_k', $x_k' + d_k$, $x_k' + \delta_k$ gelegten Ebene für verschwindende d_k und δ_k nähert; d. i. die Grenze für

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1' + d_1 & x_2' + d_2 & x_3' + d_3 & x_4' + d_4 \\ x_1' + \delta_1 & x_2' + \delta_2 & x_3' + \delta_3 & x_4' + \delta_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Glieder der Zeilen der letzteren Determinante erfüllen beim Uebergang zur Grenze die Gleichungen:

$$\begin{aligned} g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 &= \Delta, \\ g_1 x_1' + g_2 x_2' + g_3 x_3' + g_4 x_4' &= \Delta, \\ g_1 d_1 + g_2 d_2 + g_3 d_3 + g_4 d_4 &= 0, \\ g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 + g_3 \delta_3 + g_4 \delta_4 &= 0; \end{aligned}$$

ferner, wenn f'_k den Werth von $\frac{\partial f}{d x_k}$ für den Punkt P' bedeutet:

$$f_1' x_1' + f_2' x_2' + f_3' x_3 + f_4' x_4 = 0,$$
$$f_1' d_1 + f_2' d_2 + f_3' d_3 + f_4' d_4 = 0,$$
$$f_1' \delta_1 + f_2' \delta_2 + f_3' \delta_3 + f_4' \delta_4 = 0.$$

Bildet man nun unter Benutzung von acht willkürlichen Hilfsgrössen

$$l\, m\, n\, p\, l'\, m'\, n'\, p'$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

und erweitert damit die obige Gleichung der Tangentialebene, so wird dieselbe zu

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f_1'x_1 + f_2'x_2 + f_3'x_3 + f_4'x_4), & \varDelta, & (lx_1 + \cdots + px_4), & (l'x_1 + \cdots + p'x_4) \\ 0 & , \varDelta, & (lx_1' + \cdots) & , (l'x_1' + \cdots) \\ 0 & , 0, & (ld_1 + \cdots) & , (l'd_1 + \cdots) \\ 0 & , 0, & (l\delta_1 + \cdots) & , (l'\delta_1 + \cdots) \end{vmatrix}$$

$$= (f_1'x_1 + f_2'x_2 + f_3'x_3 + f_4'x_4) . \varDelta . \begin{vmatrix} (ld_1 + \cdots), & (l'd_1 + \cdots) \\ (l\delta_1 + \cdots), & (l'\delta_1 + \cdots) \end{vmatrix} .$$

Die acht Hilfsgrössen können immer so gewählt werden, dass der letzte Factor von Null verschieden ist. Demnach ist die gesuchte Gleichung der Tangentialebene an $f = 0$ in P':

$$f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentialebene sind demnach

$$u_k' = \frac{f_k' h_k}{f_1' r_1 + f_2' r_2 + f_3' r_3 + f_4' r_4}.$$

5. Bestimmung der Gleichung des Tangentialpunktes einer Tangentialebene u_k' an die Fläche $\varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$.

Die Gleichung des Tangentialpunktes ist die Grenze, in welche die Gleichung des Schnittpunktes dreier Tangentialebenen der Fläche übergeht, wenn die drei Ebenen unendlich nahe benachbart werden.

Sind $u_k' + d_k$, $u_k' + \delta_k$ die Coordinaten zweier Ebenen, welche $\varphi = 0$ befriedigen, so ist demnach die gesuchte Gleichung der für verschwindende d_k und δ_k entstehende Grenzwerth von

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1' + d_1 & u_2' + d_2 & u_3' + d_3 & u_4' + d_4 \\ u_1' + \delta_1 & u_2' + \delta_2 & u_3' + \delta_3 & u_4' + \delta_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet φ_k' den Werth von $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ für die Ebene u_k', so erfüllen die verschwindenden Variationen der Coordinaten und die übrigen Zeilen dieser Determinante die Gleichungen

$$\begin{aligned}
g_1 r_1 u_1 &+ g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 = \Delta, \\
g_1 r_1 u_1' &+ g_2 r_2 u_2' + g_3 r_3 u_3' + g_4 r_4 u_4' = \Delta, \\
g_1 r_1 d_1 &+ g_2 r_2 d_2 + g_3 r_3 d_3 + g_4 r_4 d_4 = 0, \\
g_1 r_1 \delta_1 &+ g_2 r_2 \delta_2 + g_3 r_3 \delta_3 + g_4 r_4 \delta_4 = 0, \\
\varphi_1' u_1' &+ \varphi_2' u_2' + \varphi_3' u_3' + \varphi_4 u_4' = 0, \\
\varphi_1' d_1 &+ \varphi_2' d_2 + \varphi_3' d_3 + \varphi_4' d_4 = 0, \\
\varphi_1' \delta_1 &+ \varphi_2' \delta_2 + \varphi_3' \delta_3 + \varphi_4' \delta_4 = 0.
\end{aligned}$$

Man bilde nun mit acht willkürlichen Hilfsgrössen die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & \varphi_4' \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

und erweitere mit derselben die obige Gleichung des Tangentialpunktes. Dann erhält man links das Product zweier Determinanten; dasselbe ist unter Rücksicht auf obige sieben Gleichungen gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4), & \Delta, & (l u_1 + \cdots), & (l' u_1 + \cdots) \\ 0 & \Delta, & (l u_1' + \cdots), & (l' u_1' + \cdots) \\ 0 & 0, & (l d_1 + \cdots), & (l' d_1' + \cdots) \\ 0 & 0, & (l \delta_1 + \cdots), & (l' \delta_1' + \cdots) \end{vmatrix}.$$

Diese reducirt sich auf das Product

$$(\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4) \cdot \Delta \cdot \begin{vmatrix} (l d_1 + \cdots), & (l' d_1' + \cdots) \\ (l \delta_1 + \cdots), & (l' \delta_1' + \cdots) \end{vmatrix}.$$

Die Hilfsgrössen können immer so gewählt werden, dass der letzte Factor von Null verschieden ist. Demnach ist die Gleichung des Tangentialpunktes in $T' = 0$ an $\varphi = 0$:

$$\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = 0.$$

Die Coordinaten des Tangentialpunktes sind demnach

$$x_k = \varepsilon_k \cdot \frac{\varphi'_k h_k}{\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4'}.$$

6. **Die Flächen zweiter Ordnung sind zugleich Flächen zweiter Classe und umgekehrt. — Bestimmung der Gleichung einer Fläche zweiten Grades für Plancoordinaten aus der Gleichung in Punktcoordinaten. Bestimmung der Gleichung einer Fläche in Punktcoordinaten aus der Gleichung derselben in Plancoordinaten.**

Die allgemeine Form für die Gleichung einer Fläche zweiten Grades in Punktcoordinaten ist:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 &+ 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ + a_{22}x_2^2 &+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 \\ &+ a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 \\ &+ a_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Die vier partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten sind:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4), \\ f_2 &\equiv 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4), \\ f_3 &\equiv 2(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4), \\ f_4 &\equiv 2(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4). \end{aligned}$$

Bildet man diese Functionen für P' und bezeichnet den Werth

$$f_1'r_1 + f_2'r_2 + f_3'r_3 + f_4'r_4 \text{ mit } A,$$

so gelten für die Coordinaten der Tangentialebene im Punkte P' nach 4) die vier Gleichungen

$$f'_k - \frac{A}{h_k}.u_k = 0.$$

Aus der Gleichung des Tangentialpunktes in Normalform nach §. 2, 8 folgt:

$$\frac{x_1'}{h_1}u_1 + \frac{x_2'}{h_2}u_2 + \frac{x_3'}{h_3}u_3 + \frac{x_4'}{h_4}u_4 = 0;$$

der Verein dieser fünf für x'_k linearen Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte homogene quadratische Gleichung zwischen den Coordinaten der variabeln Tangentialebenen an $f = 0$.

Die allgemeine Form für die Gleichung einer Fläche zweiter Classe ist

$$\begin{aligned} \varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) \equiv \alpha_{11} u_1^2 &+ 2\alpha_{12} u_1 u_2 + 2\alpha_{13} u_1 u_3 + 2\alpha_{14} u_1 u_4 \\ &+ \alpha_{22} u_2^2 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + 2\alpha_{24} u_2 u_4 \\ &+ \alpha_{33} u_3^2 + 2\alpha_{34} u_3 u_4 \\ &+ \alpha_{44} u_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Die vier partiellen Differentialquotienten der Function φ nach den Ebenencoordinaten sind

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv 2(\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3 + \alpha_{14} u_4), \\ \varphi_2 &\equiv 2(\alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3 + \alpha_{24} u_4), \\ \varphi_3 &\equiv 2(\alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} u_3 + \alpha_{34} u_4), \\ \varphi_4 &\equiv 2(\alpha_{14} u_1 + \alpha_{24} u_2 + \alpha_{34} u_3 + \alpha_{44} u_4). \end{aligned}$$

Bildet man diese Werthe für die Tangentialebene T' und bezeichnet

$$\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4' = A,$$

so hat man für die Coordinaten des Tangentialpunktes von T' die vier Gleichungen 5):

$$\varphi_i' - A \, . \frac{x_k}{h_k} = 0.$$

Aus der mit $\frac{1}{r}$ erweiterten Normalform der Gleichung der Tangentialebene nach §. 2, 8 folgt:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1' + \frac{x_2}{h_2} u_2' + \frac{x_3}{h_3} u_3' + \frac{x_4}{h_4} u_4 = 0.$$

Der Verein dieser fünf für u_k' linearen Gleichungen erfordert:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \frac{x_1}{h_1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \frac{x_2}{h_2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \frac{x_3}{h_3} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \frac{x_4}{h_4} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & \frac{x_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Fläche $\varphi = 0$ in Punktcoordinaten.

7. Polarebene eines Punktes. Lehrsatz: Ist $f = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten, so ist

$$T \equiv f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 = 0$$

die Gleichung der Polarebene des Punktes P' mit den Coordinaten x_k'; d. h. jede durch P' gelegte Gerade G schneidet die Fläche $F = 0$ in zwei Punkten, welche P' und dem Schnittpunkte GT harmonisch conjugirt sind.

Beweis: Seien x_k'' die Coordinaten vom Schnittpunkte GT, ξ_k die Coordinaten eines Schnittpunktes von G mit $f = 0$, so können die ξ_k aus den x_k' und x_k'' nach den Formeln abgeleitet werden:

$$\xi_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Die ξ_k befriedigen $f = 0$; substituirt man, so entsteht

$$\lambda'^2 f + \lambda' \lambda'' (f_1' x_1'' + f_2' x_2'' + f_3' x_3'' + f_4' x_4'') + \lambda''^2 f'' = 0.$$

Da x_k'' auf T gelegen ist, so ist der Coefficient von $\lambda' \lambda''$ gleich Null; aus der übrig bleibenden Gleichung ergiebt sich:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-(f'' : f')},$$

also für die Schnittpunkte GT zwei entgegengesetzt gleiche Verhältnisse der Ableitungscoefficienten, q. e. d. (§. 2, 3.)

8. Die Formeln

$$f_1' x_1'' + f_2' x_2'' + f_3' x_3'' + f_4' x_4'' \text{ und}$$
$$f_1'' x_1' + f_2'' x_2' + f_3'' x_3' + f_4'' x_4'$$

sind identisch. Liegt demnach ein Punkt x_k'' auf der Polarebene eines Punktes x_k', so liegt auch der Punkt x_k' auf der Polarebene des Punktes x_k''.

Die Polarebenen aller in einer Ebene T gelegenen Punkte um-

hüllen demnach den Pol dieser Ebene, d. h. den Punkt, dessen Polarebene die Ebene T ist.

Die Polarebenen aller in einer Geraden gelegenen Punkte umhüllen eine Gerade, deren Punkte wiederum die Pole für die durch die erste Gerade gelegten Ebenen enthält. Zwei so beschaffene Gerade heissen zwei conjugirte Polargerade.

9. Die Polarebene jedes Punktes ist eindeutig bestimmt, sobald die Discriminante von f nicht verschwindet.

Denn dann haben stets einige oder einer der vier partiellen Differentialquotienten f_k' von Null verschiedene Werthe.

Verschwindet die Discriminante, so giebt es mindestens einen Punkt, für welchen sämmtlich vier partielle Differentialquotienten verschwinden. Dieser Punkt liegt auf der Fläche; er hat jede beliebige Ebene zur Polarebene.

Sei $f = 0$ eine solche Fläche, x_k' der Punkt, für welchen zugleich

$$f_1' = f_2' = f_3' = f_4' = 0,$$

x_k'' ein beliebiger anderer Punkt der Fläche, so liegt jeder Punkt der Geraden $P'P''$ in $f = 0$; denn substituirt man

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1$$

in $f = 0$, so entsteht

$$\lambda'^2 f' + \lambda'\lambda''(f_1' x_1'' + f_2' x_2'' + f_3' x_3'' + f_4' x_4'') + \lambda''^2 f'' = 0.$$

Da nun $f' = f_k' = f'' = 0$, so wird der Gleichung durch beliebige Werthe von $\lambda'\lambda''$ genügt. Die Fläche zweiter Ordnung, deren Discriminante verschwindet, ist demnach im Allgemeinen eine Kegelfläche; ihr Mittelpunkt ist der Punkt, für welchen die partiellen ersten Differentialquotienten der Coordinatenfunction verschwinden.

10. Im Allgemeinen giebt es nur einen Punkt, welcher eine gegebene Ebene $T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ zur Polarebene hat.

Bedeutet k einen noch unbestimmten Factor, so sind die Coordinaten des Poles von T die Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned} f_1' - k a_1 &= 0, \\ f_2' - k a_2 &= 0, \\ f_3' - k a_3 &= 0, \\ f_4' - k a_4 &= 0, \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 &= \Delta. \end{aligned}$$

Sollen die Pole sämmtlicher Ebenen unendlich fern werden, so muss die Determinante dieses Systems unabhängig von

den Coefficienten a_k verschwinden, und die Lösung für k muss einen unbestimmten Werth haben. Bezeichnet δ_{ik} den Coefficienten des k^{ten} Gliedes der i^{ten} Zeile in der Discriminante der Function f, so ist die Bedingung hierfür im Allgemeinen

$$\delta_{i1} g_1 + \delta_{i2} g_2 + \delta_{i3} g_3 + \delta_{i4} g_4 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

11. Die Polarebenen aller Punkte sind unendlich fern, sobald für alle Werthe von x'_k die Gleichungen gelten:

$$f_1' = kg_1, \quad f_2' = kg_2, \quad f_3' = kg_3, \quad f_4' = kg_4.$$

Multiplicirt man der Reihe nach mit $x_1' \, x_2' \, x_3' \, x_4'$ und addirt, so erhält man:

$$2f \equiv x_1'f_1' + x_2'f_2' + x_3'f_3' + x_4'f_4' = k(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4);$$

k muss demnach ein linearer Factor von der Form

$$k \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

sein. Bezeichnet man abkürzend

$$T_\infty \equiv (g_1 x_1 + \cdots + g_4 x_4),$$

so liefert die Differentiation und die obigen Gleichungen das System

$$\tfrac{1}{2}(g_k . k + a_k T_\infty) = g_k . k.$$

Hieraus folgt das System

$$a_k T_\infty = k . g_k.$$

Vergleicht man in diesen vier Gleichungen die Coefficienten derselben Coordinaten mit einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} a_1 g_2 &= a_2 g_1, & a_2 g_3 &= a_3 g_2, \\ a_1 g_3 &= a_3 g_1, & a_2 g_4 &= a_4 g_2, \\ a_1 g_4 &= a_4 g_1, & a_3 g_4 &= a_4 g_3. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = g_1 : g_2 : g_3 : g_4.$$

Die Gleichung der Fläche also ist

$$f \equiv (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4)^2 = 0.$$

Die Fläche zweiten Grades, für welche sämmtliche Punkte eine unendlich ferne Polarebene besitzen, ist daher die unendlich ferne Ebene, doppelt gedacht.

Die Polarebenen aller Punkte sind derselben Geraden parallel, wenn

$$\delta_{i1} g_1 + \delta_{i2} g_2 + \delta_{i3} g_3 + \delta_{i4} g_4 = 0, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Denn die nach §. 2, 19 gebildete Bedingung dafür, dass die Polaren dreier beliebigen Punkte einer Geraden parallel sind, ist eine Determinante, von welcher drei Zeilen tetranomische Elemente ent-

halten. Löst man diese in 64 Determinanten mit einfachen Elementen auf, so verschwinden 40 dadurch identisch, dass sie zwei oder drei identische Zeilen haben. Das Verschwinden der ursprünglichen Determinante erfordert das Verschwinden der übrigen 24, welche sich durch Vertauschung der Zeilen auf die in der Formel $\delta_{i1} g_1 + \cdots$ enthaltenen vier Determinanten reduciren.

Der Fall

$$\delta_{i1} g_1 + \delta_{i2} g_2 + \delta_{i3} g_3 + \delta_{i4} g_4 = 0$$

(der den Cylinder mit enthält) bleibt im Allgemeinen von den ferneren Betrachtungen ausgeschlossen.

12. Sich selbst conjugirte Tetraeder. Man wähle einen Punkt P', dessen Polarebene T' im Endlichen liegt, wähle auf T' einen Punkt P'' und bestimme dessen Polarebene T''. Auf der Kante $T'T''$ wähle man einen Punkt P''', dessen Polarebene T''' mit $T'T''$ nicht parallel ist; dann ist $P'P''P'''$ $(\equiv P^{IV})$ die Polarebene von $T'T''T'''$ $(\equiv T^{IV})$ und das Tetraeder $P'P''P'''P^{IV}$ ist sich selbst conjugirt, d. h. seine Flächen sind die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken.

Wird die Gleichung der Fläche auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen, so muss

$x_k = 0$ Polarebene des Punktes $x_k = 0$, $x_l = 0$, $x_m = 0$

sein, wenn $i\,k\,l\,m$ irgend eine Permutation der Zahlen 1 2 3 4 angiebt. Es gelten also für die Coefficienten von f folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &\equiv A_1 x_1,\\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &\equiv A_2 x_2,\\
a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &\equiv A_3 x_3,\\
a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{41}x_4 &\equiv A_4 x_4.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche zweiten Grades auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder der Fläche bezogen lautet demnach:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0. \text{ —}$$

13. Pol einer Ebene. Lehrsatz: Ist $\varphi = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Plancoordinaten, so ist

$$P \equiv \varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = 0$$

die Gleichung des Poles der Ebene u_k'; d. h. die je zwei

durch eine willkürliche Gerade G der Ebene u_k' an φ gelegten Tangentialebenen sind der Ebene u_k' und der durch G und P' bestimmten Ebene harmonisch conjugirt.

Beweis: Sei T'' mit den Coordinaten u_k'' eine beliebige, durch P gelegte Ebene, so werden die Coordinaten jeder durch die Gerade $T''\,T'$ gelegten Ebene T durch die Formeln dargestellt:

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Soll T die Fläche $\varphi = 0$ berühren, so ergiebt dies für $\lambda'\,\lambda''$, wenn $\varphi_k^{(i)}$ den Werth von φ für $u_k^{(i)}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\lambda'^2 \varphi' + \lambda' \lambda'' (\varphi_1' u_1'' + \varphi_2' u_2'' + \varphi_3' u_3'' + \varphi_4' u'') + \lambda''^2 \varphi'' = 0.$$

Der Coefficient von $\lambda'\,\lambda''$ ist Null, da ja P in T'' enthalten ist; also erhält man für das Verhältniss der λ:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-\varphi'' : \varphi'},$$

d. i. zwei entgegengesetzt gleiche Werthe, q. e. d.

14. Die Formeln

$$\varphi_1' u_1'' + \varphi_2' u_2'' + \varphi_3' u_3'' + \varphi_4' u_4'' \text{ und}$$
$$\varphi_1'' u_1' + \varphi_2'' u_2' + \varphi_3'' u_3' + \varphi_4'' u_4'$$

sind identisch. Jede Ebene u_k'' also, welche durch den Pol der Ebene u_k' geht, hat ihren Pol auf der Ebene u_k'.

Dreht sich also eine Ebene um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf einer Ebene, welche jenen Punkt zum Pole hat.

Dreht sich eine Ebene um eine Gerade, so bewegt sich ihr Pol auf einer Geraden, deren einhüllende Ebenen die Punkte der ersten Geraden zu Polen haben.

15. Der Pol einer Ebene wird nur dann unbestimmt, wenn zugleich sämmtliche partielle erste Differentialquotienten von φ verschwinden. Dies tritt — und zwar im Allgemeinen für nur eine Ebene — ein, sobald die Discriminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Seien u_k' die Coordinaten dieser Ebene, für welche zugleich

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 0, \quad \varphi_3' = 0, \quad \varphi_4' = 0,$$

ferner u_k'' die Coordinaten irgend einer andern Tangentialebene an $\varphi = 0$, so genügt jede durch die Gerade $T''\,T'$ gelegte Ebene T der Gleichung $\varphi = 0$.

Denn stellt man die Coordinaten von T nach den Formeln dar:

$$u_k = \lambda' u_k' + \lambda'' u_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

so liefert die Substitution in φ:

$$\lambda'^2 \varphi' + \lambda'\lambda'' (\varphi_1' u_1'' + \varphi_2' u_2'' + \varphi_3' u_3'' + \varphi_4' u_4'') + \lambda''^2 \varphi''.$$

Nach den Voraussetzungen ist

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3' = \varphi_4' = 0,$$

also in der That φ durch die Coordinaten von T unabhängig von λ' und λ'' annullirt.

Die Fläche φ, deren Discriminante verschwindet, ist demnach im Allgemeinen als eine Grenzfläche charakterisirt. Die Hauptebene derselben hat keinen bestimmten Punkt zum Pole.

16. Der Pol jeder Ebene wird unendlich fern, wenn unabhängig von den Werthen u_k' die Gleichung besteht:

$$\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4' = 0.$$

Hierzu ist der Verein folgender vier Gleichungen ausreichend und nothwendig:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} &= 0, \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24} &= 0, \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} + \alpha_{34} &= 0, \\ \alpha_{14} + \alpha_{24} + \alpha_{34} + \alpha_{44} &= 0. \end{aligned}$$

17. Die Coordinaten der Ebene, welche einen gegebenen Punkt

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

zum Pole haben, bestimmen sich aus den fünf Gleichungen

$$\varphi_k' = A\alpha_k,$$

$$g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 = \Delta.$$

Sollen alle Punkte Pole der unendlich fernen Ebene sein, so muss unabhängig von α_k dieses Gleichungssystem von

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$$

erfüllt werden. Hierzu ist ausreichend und nöthig, dass $A = 0$, und es erübrigen dann für die Coefficienten von φ dieselben vier Gleichungen, welche in 16) aufgefunden worden sind.

Beide in 16) und 17) betrachteten Specialfälle fallen demnach zusammen.

Zur näheren Kenntniss des durch diese Gleichungen charakterisirten Gebildes bemerke man, dass jeder seiner Punkte

$$P \equiv \varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = 0$$

auf der unendlich entfernten Ebene liegt, da ja

$$\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \varphi_4' = 0.$$

Das Gebilde besteht demnach aus zwei unendlich entfernten, getrennten oder vereinten Punkten.

In der That erfüllen die Coefficienten von

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4)(\alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 + \alpha_4' u_4) = 0$$

für

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \text{ und } \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' = 0$$

die obigen vier Bedingungsgleichungen.

Dieser Fall, sowie der, in welchem die Polarebenen aller Pole einer Geraden parallel sind, mögen von den künftigen Betrachtungen ausgeschlossen bleiben.

18. Sich selbst conjugirte Tetraeder. Man wähle eine Ebene T', deren Pol P' im Endlichen liegt; ferner eine Ebene T'', welche durch P' geht, T' nicht parallel ist, und deren Pol P'' ebenfalls im Endlichen liegt; durch die Gerade $P'P''$ lege man eine Ebene T''', welche $T'T''$ nicht parallel ist. Alsdann ist der Punkt $T'T''T'''$ ($\equiv P^{IV}$) der Pol für die Ebene $P'P''P'''$ ($\equiv T^{IV}$), und das Tetraeder $P'P''P'''P^{IV}$ ist ein sich selbst conjugirtes Tetraeder, d. h. jede Tetraederfläche hat die gegenüberliegende Ecke zum Pol.

Wird die Gleichung der Fläche auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen, so hat die Ebene

$$u_k = u_l = u_m = 0 \text{ den Punkt } u_i = 0$$

zum Pol, wenn $i\,k\,l\,m$ irgend eine Permutation von 1 2 3 4 ist. Hieraus folgen für die Coefficienten der Function φ die vier Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3 + \alpha_{14} u_4 &\equiv A_1 u_1,\\
\alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3 + \alpha_{24} u_4 &\equiv A_2 u_2,\\
\alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} u_3 + \alpha_{34} u_4 &\equiv A_3 u_3,\\
\alpha_{14} u_1 + \alpha_{24} u_2 + \alpha_{34} u_3 + \alpha_{44} u_4 &\equiv A_4 u_4.
\end{aligned}$$

Dies System ergiebt:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = 0.$$

Die Gleichung der Flächen zweiter Classe auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen lautet demnach:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0.$$

19. Die Gleichung der Fläche $f = 0$, welche auf ein für Punktcoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen ist, lautet zufolge der hier vereinfachten Beziehungen:

$$\begin{cases} a_k x_k = A \cdot \frac{u_k}{h_k}, \\ \frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} + \frac{u_4 x_4}{h_4} = 0, \end{cases}$$

für Plancoordinaten:

$$\frac{u_1^2}{a_1 h_1^2} + \frac{u_2^2}{a_2 h_2^2} + \frac{u_3^2}{a_3 h_3^2} + \frac{u_4^2}{a_4 h_4^2} = 0,$$

oder, nachdem man die Δ^2 erweitert hat:

$$\frac{g_1^2}{a_1} u_1^2 + \frac{g_2^2}{a_2} u_2^2 + \frac{g_3^2}{a_3} u_3^2 + \frac{g_4^2}{a_4} u_4^2 = 0.$$

Die Gleichung der Fläche $\varphi = 0$, welche auf ein für Plancoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen ist, folgt für Punktcoordinaten aus den Beziehungen

$$\alpha_k u_k = A \frac{x_k}{h_k},$$

$$\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} + \frac{u_4 x_4}{h_4} = 0$$

nach entsprechender Erweiterung zu

$$\frac{g_1^2}{\alpha_1} x_1^2 + \frac{g_2^2}{\alpha_2} x_2^2 + \frac{g_3^2}{\alpha_3} x_3^2 + \frac{g_4^2}{\alpha_4} x_4^2 = 0.$$

Hieraus folgt: Ein für Punktcoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder ist auch nach der für Behandlung der Gleichungen in Plancoordinaten gegebenen Definition sich selbst conjugirt.

Da nun das erste Paar Pol und Polarebene bei der Construction des sich selbst conjugirten Tetraeders beliebig gewählt wird, so folgt weiter, dass beide Definitionen für Pol und Polare sich auf dieselben conjugirten Paare von Punkt und Ebene beziehen.

20. Directer analytischer Beweis dafür, dass eine Ebene, deren Gleichung $T = 0$ ist und deren Coordinaten u_k' sind, und ein Punkt, dessen Gleichung $P = 0$ ist und dessen Coordinaten x_k' sind, gleichzeitig die beiden Beziehungen erfüllen:

$$T \equiv f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 = 0,$$
$$P \equiv \varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 + \varphi_4' u_4 = 0,$$

wenn $f = 0$ und $\varphi = 0$ die Gleichungen derselben Fläche zweiter Ordnung in Punkt-, beziehentlich in Plancoordinaten sind:

Sei T in der Form gegeben.

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

so sind die Coordinaten von T:

a) $$u_k = A \,.\, a_k h_k,$$

wo A einen den vier u_k gemeinsamen Factor bezeichnet.

Die Coordinaten des Punktes P, dessen Polarebene T ist, bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= B \,.\, a_1, \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= B \,.\, a_2, \\ a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= B \,.\, a_3, \\ a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4 &= B \,.\, a_4. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit δ_{ik} den Coefficienten des i^{ten} Gliedes der k^{ten} Reihe in der Discriminante von f, so folgen hieraus die Lösungen:

b) $$x_i = C(a_1 \delta_{i1} + a_2 \delta_{i2} + a_3 \delta_{i3} + a_4 \delta_{i4}),$$

worin C den x_i gemeinsam ist.

Die Gleichung der Fläche f in Plancoordinaten kann geschrieben werden:

$$\varphi \equiv \frac{u_1}{h_1} \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{ik} + \frac{u_2}{h_2} \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{2k} + \frac{u_3}{h_3} \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{3k} + \frac{u_4}{h_4} \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{4k} = 0.$$

Da

$$\delta_{i1} = \delta_{1i},$$

so kann man hierfür auch setzen:

$$\varphi \equiv \Sigma \frac{u_k^2}{h_k^2} \delta_{kk} + 2 \Sigma \frac{u_i}{h_i} \frac{u_k}{h_k} \delta_{ik},$$

wenn k eine der vier Ziffern 1, 2, 3, 4 und i eine von k verschiedene derselben Ziffern bezeichnen.

Die partiellen Differentialquotienten nach u_i sind hiernach:

$$\varphi_i = 2 \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{ki}, \quad k = 1\,2\,3\,4.$$

Der Pol von u_k hat hiernach die Coordinaten

$$\xi_i = D \Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{ki},$$

wenn D einen von i unabhängigen Factor bezeichnet.

Setzt man hier für $\frac{u_k}{h_k}$ die aus a) folgenden Werthe ein, so entsteht

$$\xi_i = E\,(a_1 \delta_{1i} + a_2 \delta_{2i} + a_3 \delta_{3i} + a_4 \delta_{4i}),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

c) $$\xi_i = E\,(a_1\,\delta_{i1} + a_2\,\delta_{i2} + a_3\,\delta_{i3} + a_4\,\delta_{i4}),$$
wo E von i unabhängig ist.

Vergleicht man die Formeln b) mit c), so folgt
$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4.$$

Nimmt man hierzu die Gleichungen
$$\Sigma g_k x_k = \Delta, \quad \Sigma g_k \xi_k = \Delta,$$
so folgt ferner
$$x_k = \xi_k.$$

Der nach Punktcoordinaten definirte Pol x_k ist demnach identisch mit dem nach Plancoordinaten definirten Pol ξ_k, q. e. d.

21. **Einige besondere Formen für die Gleichung von Oberflächen zweiter Ordnung.**

a) Für die Fläche, welche durch die Ecke A_i des Axentetraeders geht, ist in der Gleichung für Punktcoordinaten
$$a_{ii} = 0.$$

b) Die Fläche, welche dem Axentetraeder umschrieben ist, hat daher die Gleichung:
$$a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{13}\,x_1\,x_3 + a_{14}\,x_1\,x_4 + a_{23}\,x_2\,x_3 + a_{24}\,x_2\,x_4 + a_{34}\,x_3\,x_4 = 0.$$

c) Die Fläche, welche die Tetraederebene g_i berührt, hat in Gleichung für Plancoordinaten
$$\alpha_{ii} = 0.$$

d) Eine dem Axentetraeder eingeschriebene Fläche hat zur Gleichung:
$$\alpha_{12}u_1\,u_2 + \alpha_{13}u_1\,u_3 + \alpha_{14}u_1\,u_4 + \alpha_{23}u_2\,u_3 + \alpha_{24}u_2\,u_4 + \alpha_{34}u_3\,u_4 = 0.$$

e) Die Fläche, für welche A_i der Pol von g_i ist, hat in Punktcoordinaten:
$$a_{ik} = a_{il} = a_{im} = 0, \quad a_{ii} \neq 0;$$
in Plancoordinaten:
$$\alpha_{ik} = \alpha_{il} = \alpha_{im} = 0, \quad \alpha_{ii} \neq 0.$$

f) Ist A_1 der Pol von g_1, A_2 der Pol von g_2, so ist die Gleichung der Fläche:

in Punktcoordinaten:
$$a_{11}\,x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2\,a_{34}\,x_3 x_4 + a_{44}x_4^2 = 0;$$
in Plancoordinaten:
$$\alpha_{11}\,u_1^2 + \alpha_{22}\,u_2^2 + \alpha_{33}\,u_3^2 + 2\,\alpha_{34}\,u_3\,u_4 + \alpha_{44}\,u_4^2 = 0.$$

22. **Alle Flächen zweiter Ordnung, welche sieben willkürliche Punkte enthalten, gehen im Allgemeinen**

noch durch einen achten Punkt, der durch die sieben gegebenen Punkte eindeutig und reell bestimmt ist.

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche sieben willkürliche Ebenen berühren, berühren im Allgemeinen noch eine achte Ebene, welche durch die gegebenen Ebenen eindeutig und reell bestimmt ist.

Um den ersten Theil des Satzes zu beweisen, lege man eine Oberfläche zweiter Ordnung durch die sieben gegebenen Punkte. Die Constanten dieser Oberfläche erfüllen dann sieben lineare Bedingungsgleichungen, welche man erhält, wenn man die Coordinaten der sieben Punkte in die Gleichung der Oberfläche substituirt.

Mit Hülfe dieser sieben Gleichungen kann man sieben der zehn Constanten in der Gleichung der Oberfläche als lineare, homogene Functionen der übrigen drei ausdrücken. Die Coefficienten in diesen Functionen sind dann gegebene, aus den Coordinaten der sieben Punkte in leicht angebbarer Weise zusammengesetzte Werthe.

Substituirt man diese sieben Functionen für die sieben eliminirten Constanten in die Gleichung der durch die sieben Punkte gelegten Oberfläche, so erscheint die neue Gleichung als ein Aggregat von der Form:

$$a\varphi + b\psi + c\chi = 0,$$

wenn a, b, c die drei nicht eliminirten Constanten der Oberfläche und φ, ψ, χ drei homogene quadratische Formen der Coordinaten bezeichnen, deren Coefficienten sämmtlich bekannte aus den gegebenen Punkten zusammengesetzte Werthe sind.

Hieraus folgt, dass alle Oberflächen durch die sieben gegebenen Punkte die Punkte enthalten, welche den Oberflächen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0$$

gemeinsam sind. Da diese die gegebenen sieben Punkte gemein haben, so enthalten sie noch einen reellen Schnittpunkt; und da die drei Functionen φ, ψ, χ bekannt sind, so ist demnach auch der achte Schnittpunkt der Flächen $\varphi = \psi = \chi = 0$ durch die sieben gegebenen Punkte bestimmt.

Ebenso erfolgt der Beweis des zweiten Satzes.

---

23. Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung nach ihren auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogenen Gleichungen.

Die beiden Gleichungen der Fläche seien

a) $$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

b) $$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0,$$
wo also $$a_k \, . \, \alpha_k = g_k^2.$$

A. Einer oder mehrere von den vier Coefficienten a_k oder α_k sind gleich Null. In der Gleichung der Fläche in allgemeinster Form wird dies dadurch angezeigt, dass alsdann die Discriminante der Functionen f, beziehentlich φ, die ja eine Invariante derselben ist, verschwindet.

1. $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, also $\alpha_4 = \infty$, $\alpha_3 = \infty$, $\alpha_2 = \infty$, ohne bestimmtes Verhältniss.

Die Gleichung $f = 0$ reducirt sich auf $x_1^2 = 0$, und die Uebereinstimmung damit ergiebt sich aus b): $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, d. h. die Gleichung repräsentirt die eine Ebene des Tetraeders. —

2. $\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = 0$, also $a_4 = \infty$, $a_3 = \infty$, $a_2 = \infty$, ohne bestimmtes Verhältniss zu einander.

Man erhält
$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 = 0 \text{ und } x_4 = x_3 = x_2 = 0;$$
die Gleichung repräsentirt einen Eckpunkt des Tetraeders. —

3. $a_4 = 0$, $a_3 = 0$; $a_1 : a_2 > 0$.

Die Gleichung in Punktcoordinaten wird zu
$$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0,$$
und wird nur durch die Punkte befriedigt, für welche zugleich
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$
also für eine Kante des Tetraeders. —

4. $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\alpha_1 : \alpha_2 > 0$.

Die Gleichung in Plancoordinaten ist
$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0.$$
Ihr genügen nur die Ebenen, für welche zugleich
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$
Sie umhüllen eine Kante des Tetraeders. —

5. $a_4 = 0$, $a_3 = 0$; $a_1 : a_2 < 0$.

In diesem Falle kann man die Gleichung schreiben:
$$f \equiv a^2 x_1^2 - a_2 x_2^2 = 0.$$
Sie stellt zwei Ebenen dar, deren Gleichungen die Form haben:
$$a x_1 + b x_2 = 0 \text{ und } a x_1 - b x_2 = 0.$$
Dies Ebenenpaar ist den Axenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ harmonisch conjugirt. —

6. $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\alpha_1 : \alpha_2 < 0$.

Die Gleichung $\varphi = 0$ kann geschrieben werden:

$$\varphi \equiv \alpha^2 u_1^2 - \beta^2 u_2^2 = 0.$$

Sie ergiebt zwei Punkte:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \text{ und } \alpha u_1 - \beta u_2 = 0.$$

Dieses Punktenpaar liegt in einer Tetraederkante und ist den Endpunkten derselben harmonisch conjugirt. —

7. $a_4 = 0$, $a_i : a_k > 0$.

Der Gleichung genügt nur ein Punkt:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0. —$$

8. $\alpha_4 = 0$, $\alpha_i : \alpha_k > 0$.

Der Gleichung entspricht nur eine Ebene:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0. —$$

9. $a_4 = 0$, und nicht alle drei a_k haben gleiches Zeichen.

Die Gleichung $f = 0$ ergiebt einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in einer Ecke des Tetraeders liegt. —

10. $\alpha_4 = 0$, und nicht alle drei α_k haben gleiches Zeichen.

Die Gleichung $\varphi = 0$ ergiebt eine Grenzfläche zweiter Ordnung, für welche die eine Tetraederfläche Hauptebene ist. —

24. Zur weiteren Classification der Flächen, deren Discriminante nicht verschwindet, dienen folgende Sätze:

Auf welches der unendlich vielen sich selbst conjugirten Tetraeder man auch eine Fläche bezieht, immer bleibt die Anzahl der positiven und die Anzahl der negativen Coefficienten in der Gleichung der Fläche unverändert.

Dieser Satz folgt aus dem Trägheitsgesetz für quadratische Formen.

25. Wenn in der Gleichung $f = 0$ drei Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, so lassen sich in die Fläche keine Geraden legen.

Denn wenn sich eine Gerade soll in die Fläche legen lassen, so muss die Fläche alle vier Ebenen des Axentetraeders in reellen Punkten schneiden. Haben aber z. B. $a_1\, a_2\, a_3$ dasselbe Vorzeichen, so hat die Fläche f mit der Ebene $x_4 = 0$ keine reellen Punkte gemein.

26. Wenn in der Gleichung $f = 0$ zwei positive und zwei negative Coefficienten vorhanden sind, so ist die Fläche eine geradlinige Fläche. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei gerade Linien, die ganz in die Fläche fallen.

Denn in diesem Falle kann die Gleichung in Punktcoordinaten geschrieben werden:

$$f \equiv a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - a_4^2 x_4^2 = 0.$$

Hierfür kann man setzen:

$$f \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)(a_1 x_1 - a_2 x_2) + (a_3 x_3 + a_4 x_4)(a_3 x_3 - a_4 x_4) = 0.$$

Kürzt man ab:

$$T_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad T_2 \equiv a_1 x_1 - a_2 x_2,$$
$$T_3 \equiv a_3 x_3 + a_4 x_4, \quad T_4 \equiv a_3 x_3 - a_4 x_4,$$

so wird f erfüllt für alle Punkte, für welche zugleich

$$T' \equiv \lambda T_1 - \mu T_3 = 0 \text{ und } T'' \equiv \mu T_2 + \lambda T_4 = 0,$$

sowie für alle Punkte, für welche

$$T''' \equiv \lambda T_1 - \mu T_4 = 0 \text{ und } T^{IV} \equiv \mu T_2 + \lambda T_3 = 0.$$

Die Ebenen T' bilden ein Büschel mit $T_1 T_3$,
" " T'' " " " " $T_2 T_4$,
" " T''' " " " " $T_1 T_4$,
" " T^{IV} " " " " $T_2 T_3$.

Durch Variation der Coefficienten $\lambda \mu$ geht aus der Durchdringung je zweier demselben $\lambda \mu$ zugehörigen Ebenen T' und T'' das eine System, und je zweier zusammengehörigen Ebenen T''' und T^{IV} das andere System von in der Fläche enthaltenen Geraden hervor.

Man schliesst hieraus leicht: Die Geraden eines Systems schneiden sich nicht. Jede Gerade des einen Systems schneidet jede Gerade des andern.

Um nachzuweisen, dass jeder Punkt x_k', welcher der Gleichung

$$T_1 T_2 + T_3 T_4 = 0$$

entspricht, auf dem Durchschnitt zweier Ebenen

$$T' \equiv \lambda T_1 + \mu T_3 = 0, \quad T'' \equiv \mu T_2 - \lambda T_4$$

liegt, wähle man $\lambda \mu$ so, dass, wenn T_i für die Coordinaten von P' in T_i' übergeht,

$$\lambda T_1' + \mu T_3' = 0, \text{ also } T_1' = -\frac{\mu}{\lambda} T_3'.$$

Da nun P' die Gleichung erfüllt:

$$T_1' T_2' - T_3' T_4' = 0,$$

so ergiebt sich nach der Substitution des Werthes für T_1':

$$\mu T_2' - \lambda T_4' = 0,$$

d. i. P' erfüllt die Gleichungen zweier zusammengehörigen Ebenen T' und T''.

Ebenso lässt sich beweisen, dass jeder Punkt der Fläche auf dem Durchschnitte zweier Ebenen T''' und T^{IV} gelegen ist. Mithin

gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Gerade, die ganz der Fläche angehören, q. e. d.

Jede Tangentialebene enthält die durch den Berührungspunkt gehenden Geraden der Fläche.

Denn wenn $x_k' x_k''$ die Coordinaten zweier auf einer Geraden der Fläche gelegenen Punkte sind, so gehört auch der Punkt der Fläche an, dessen Coordinaten nach den Formeln gebildet sind:

$$x_k = \lambda' x_k' + \lambda'' x_k'', \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Setzt man dies in die Gleichung $f = 0$ ein, so entsteht

$$\lambda'^2 f' + \lambda''^2 f'' + 2\lambda'\lambda''(f_1' x_1'' + f_2' x_2'' + f_3' x_3'' + f_4' x_4'') = 0;$$

da nach der Voraussetzung

$$f' = 0 \text{ und } f'' = 0,$$

so ist auch

$$f_1' x_1'' + f_2' x_2'' + f_3' x_3'' + f_4' x_4'' = 0;$$

der Punkt x_k'' genügt demnach der Gleichung der Tangentialebene in x_k', q. e. d.

Ausser diesen Geraden kann es keine Geraden auf der Fläche geben.

27. Die analoge Untersuchung für Plancoordinaten ergiebt: **Wenn von den Coefficienten der Gleichung $\varphi = 0$ (also auch von $f = 0$) drei dasselbe Zeichen haben, so giebt es kein ebenes Büschel, das aus lauter Ebenen der Fläche φ zusammengesetzt ist.**

Denn dann müsste durch jeden Tetraedereckpunkt eine solche Büschelebene gehen, es müsste also jeder Tetraedereckpunkt eine Ebene von $\varphi = 0$ enthalten. Sind aber z. B. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ positiv, α_4 negativ, so enthält der Punkt $u_4 = 0$ keine reelle Tangentialebene der Fläche.

28. **Sind von den Coefficienten in der Gleichung $\varphi = 0$ (also auch in $f = 0$) zwei positiv und zwei negativ, so giebt es unzählig viele Büschel aus Tangentialebenen. Jede Tangentialebene gehört zwei solchen Büscheln an.**

Denn in diesem Falle kann man die Gleichung schreiben:

$$\varphi \equiv \alpha_1^2 u_1^2 - \alpha_2^2 u_2^2 + \alpha_3^2 u_3^2 - \alpha_4^2 u_4^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\equiv (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2) + (\alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4)(\alpha_3 u_3 - \alpha_4 u_4) = 0.$$

Man kürze ab

$$P_1 \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad P_2 \equiv \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2,$$

$$P_3 \equiv \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4, \quad P_4 \equiv \alpha_3 u_3 - \alpha_4 u_4.$$

Alsdann enthält φ alle Ebenen, für welche zugleich

$$P' \equiv \lambda P_1 + \mu P_3 = 0, \quad P'' \equiv \mu P_2 - \lambda P_4 = 0,$$

sowie alle Ebenen, für welche zugleich

$$P''' \equiv \lambda P_1 + \mu P_4 = 0, \quad P^{IV} \equiv \mu P_2 - \lambda P_3 = 0.$$

Die Punkte P' bilden eine geradlinige Reihe mit P_1 und P_3,
" " P'' " " " " " P_2 " P_4,
" " P''' " " " " " P_1 " P_4,
" " P^{IV} " " " " " P_2 " P_3.

Da durch das Verhältniss $\lambda : \mu$ die zusammengehörigen Punktenpaare $P' P''$ und $P''' P^{IV}$ eindeutig bestimmt sind, so folgt, dass keine Ebene zwei Büscheln des Systems $P' P''$ oder beziehentlich $P''' P^{IV}$ gemeinsam sein kann, oder dass von den Büschelaxen $P' P''$, sowie von denen $P''' P^{IV}$ keine die andere schneidet.

Jede Axe des einen Systems schneidet jede Axe des andern.

Es müssen sich dann immer vier Zahlen $\alpha \beta \gamma \delta$ finden lassen, durch welche für vier Werthe $\lambda \mu \lambda' \mu'$ die Identität erfüllt wird:

$$\alpha P' + \beta P'' \equiv \gamma P''' + \delta P^{IV}.$$

Dies führt auf vier für $\alpha \beta \gamma \delta$ lineare Gleichungen; die Determinante dieses Systems

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda' & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \lambda' \\ 0 & \mu & 0 & -\mu' \\ 0 & \lambda & \mu' & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet, also ist die Wahl immer ausführbar, q. e. d.

Um nachzuweisen, dass jede Tangentialebene u'_k von $\varphi = 0$ zwei Büscheln angehört, bemerke man, dass für u'_k und einen davon abhängigen Werth von $\lambda : \mu$

$$P_1 P_2 + P_3 P_4 = 0 \text{ und zugleich } P' = 0, \; P'' = 0,$$

sowie

$$P_1 P_2 + P_3 P_4 = 0 \text{ und zugleich } P''' = 0, \; P^{IV} = 0.$$

Aehnlich, wie den analogen Satz für die vorhergehende Untersuchung in Punktcoordinaten, beweist man:

Die beiden Axen, welche eine Tangentialebene enthält, schneiden sich im Berührungspunkte.

Es fallen hiernach die Axen der aus lauter Tangentialebenen

zusammengesetzten Büschel und die aus lauter Punkten der Fläche bestehenden Geraden zusammen.

29. Lehrsatz: Beim Uebergange von einem sich selbst conjugirten Tetraeder zu einem andern bleibt die Summe der Coefficienten in der Gleichung $f = 0$, sowie in der Gleichung $\varphi = 0$ unverändert.

Beweis: a) für die Constanz der Summe der Coefficienten in $f = 0$.

Transformirt man nach §. 3, 3, so erfüllen die Coefficienten folgende Bedingungsgleichungen, wenn das neue System ein sich selbst conjugirtes ist:

$$\sum{}^i a_i a_k^{(i)} a_l^{(i)} = 0.$$

Für k und l wähle man je zwei verschiedene der Nummern 1 2 3 4, so erhält man die nothwendigen und ausreichenden sechs Bedingungen.

Die Coefficientensumme in der transformirten Gleichung ist

$$S = \Sigma a_i (a_1^{(i)2} + a_2^{(i)2} + a_3^{(i)2} + a_4^{(i)2}).$$

Fügt man zu dieser Summe die sechs Formeln

$$-2 \sum{}^i a_i a_k^{(i)} a_l^{(i)} \cos \gamma_{kl} = 0,$$

so erhält man

$$\Sigma a_i (a_1^{(i)2} + a_2^{(i)2} + a_3^{(i)2} + a_4^{(i)2} - 2 a_1^i a_2^i \cos \gamma_{12} - 2 a_1^i a_3^i \cos \gamma_{13} \\ - 2 a_1^i a_4^i \cos \gamma_{14} - 2 a_2^i a_3^i \cos \gamma_{23} - 2 a_2^i a_4^i \cos \gamma_{24} - 2 a_3^i a_4^i \cos \gamma_{34}).$$

Nach den in §. 3, 2) enthaltenen Voraussetzungen über die Coefficienten der Transformationsformeln sind die Coefficienten der a_i in dieser Summe gleich der Einheit; also ist

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

q. e. d.

Beweis: b) für die Constanz der Summe der Coefficienten in $\varphi = 0$.

Transformirt man nach §. 3, 7), so erfüllen die Coefficienten nach der Voraussetzung folgende sechs Gleichungen:

$$\sum{}^i \alpha^i \alpha_k^{(i)} \alpha_l^{(i)} = 0, \; kl \text{ zwei verschiedene von } 1\,2\,3\,4.$$

Die Coefficientensumme der transformirten Gleichung ist

$$S = \Sigma \alpha_i (\alpha_1^{(i)2} \alpha_2^{(i)2} + \alpha_3^{(i)2} + \alpha_4^{(i)2}).$$

Fügt man die sechs Formeln hinzu:

$$2 \sum{}^i \alpha_i \alpha_k^i \alpha_l^i,$$

so erhält man

$$S = \Sigma \alpha_i (\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i + \alpha_4^i)^2.$$

Da nun nach den Voraussetzungen des §. 3, 7)

$$\alpha_1{}^i + \alpha_2{}^i + \alpha_3{}^i + \alpha_4{}^i = 1,$$

so folgt

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

q. e. d.

30. **B.** Classification der Flächen, deren Discriminante von Null verschieden ist.

I. Geradlinige Flächen: Zwei Coefficienten haben dasselbe Vorzeichen.

a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$

In diesem Falle liegt der Pol der unendlich fernen Ebene — d. i. das Centrum der Fläche — unendlich fern, denn seine Gleichung ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Dies charakterisirt das hyperbolische Paraboloid.

b) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ist von Null verschieden.

Von den beiden Coordinaten des Mittelpunktes sind hier stets zwei negativ, zwei positiv. Das Centrum liegt also für alle sich selbst conjugirten Tetraeder in einem der sechs den Kanten anliegenden Räume.

Wählt man das Centrum selbst als Tetraederecke, so bleibt jene Lage des Centrums ungeändert, also werden zwei Coefficienten der transformirten Gleichung negativ, einer positiv; die Gleichung in Punktcoordinaten erhält also die Form

$$-a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + 1 = 0.$$

Hierdurch wird das einschalige Hyperboloid charakterisirt.

II. Nicht geradlinige Flächen. Drei Coefficienten haben dasselbe Vorzeichen.

a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$

Das Centrum liegt unendlich fern; der Gleichung gehört das elliptische Paraboloid zu.

In jedem von a) verschiedenen Falle kann man die Gleichung so umbilden, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 > 0.$$

b) Drei Coefficienten sind positiv, einer negativ.

In diesem Falle hat das Centrum drei positive Coordinaten, liegt also in einem der vier einer Tetraederfläche aussen anliegenden Räume. Wählt man den Mittelpunkt als den einen Tetraederpunkt, so wird demnach die Gleichung zu

$$-a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids.

c) Drei Coefficienten sind negativ, einer positiv. In diesem Falle hat das Centrum drei negative Coordinaten, liegt in dem äusseren Scheitelraume einer Tetraederecke. Bezieht man die Gleichung auf ein Tetraeder, welches das Centrum als Eckpunkt enthält, so wird die Gleichung

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 1 = 0;$$

sie repräsentirt also das Ellipsoid.

30. Bezieht man die Gleichungen der Flächen auf ein Tetraeder, von welchem ein Eckpunkt (A_4) unendlich fern ist, so geht nach §. 4, 3 die Gleichung zwischen den homogenen Plancoordinaten in eine nicht-homogene Gleichung zwischen den Abschnitten der variabeln Ebene auf den nach dem unendlich fernen Punkte gezogenen Geraden (also auf Geraden, die durch $A_1 A_2 A_3$ parallel mit dem der Ebene $A_1 A_2 A_3$ conjugirten Durchmesser gezogen sind) über.

Die eine Coordinate des Centrums wird gegen die anderen verschwindend klein, aber die Vorzeichen der Centrumcoordinaten, die für die Fläche charakteristisch sind, bleiben unverändert.

Hiernach wird die Gleichung

des einschaligen Hyperboloids: $\alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 - \alpha_3^2 v_3^2 = 1$,

des Ellipsoids: $\alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 - \alpha_3^2 v_3^2 = 1$.

Da unter den nicht verschwindenden Coordinaten des Mittelpunktes beim Ellipsoid hier stets zwei negativ sind und eine positiv ist, so folgt, dass in der Gleichung des Ellipsoids, wenn sie in der angegebenen Form [nicht mit (— 1) erweitert] geschrieben wird:

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 > 0.$$

Die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids nimmt in diesem Falle zwei verschiedene Formen an. Legt man das Tetraeder so, dass der Mittelpunkt im Innern des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegt, so wird das Glied constant, welches in den negativen Coefficienten multiplicirt ist; die Gleichung erhält also die Form

a) $$\alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 + \alpha_3^2 v_3^2 = 1.$$

Der Tangentialpunkt einer Ebene $v_1' v_2' v_3'$ hat die Gleichung

$$\alpha_1 v_1' v_1 + \alpha_2 v_2' v_2 + \alpha_3 v_3' v_3 = 1,$$

wo also

$$\alpha_1^2 v_1'^2 + \alpha_2^2 v_2'^2 + \alpha_3^2 v_3'^2 = 1.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, dass es keine Tangentialebene v_k' giebt, deren Tangentialpunkt in der Fläche g_4, d. i. in

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

liegt. Die Schlussfolgerung ist umkehrbar, mithin hat die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids dann und nur dann die Form a) mit drei positiven Coefficienten, wenn die Diametralebene $A_1 A_2 A_3$ die Fläche nicht schneidet.

Legt man hingegen das Tetraeder so, dass der Mittelpunkt ausserhalb desselben liegt, wobei er dann stets in einem der einen Kante aussen anliegenden Flächentheile sich befindet, so wird ein mit positivem Coefficienten behaftetes Glied constant; die Gleichung erhält jetzt die Form

b) $$\alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 - \alpha_3^2 v_3^2 = 1.$$

In diesem Falle schneidet die Diametralebene $A_1 A_2 A_3$ die Fläche. Da zwei von den nicht verschwindenden Coordinaten des Centrums positiv sind, die dritte negativ ist, so folgt weiter, dass hier stets

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0.$$

---

31. Ist eine Oberfläche zweiter Ordnung einem Tetraeder eingeschrieben, so liegen die vier Geraden, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, auf einem Hyperboloid.

Ist eine Oberfläche zweiter Ordnung einem Tetraeder umschrieben, so liegen die vier Geraden, in welchen die Tetraederebenen von den Tangentialebenen an den Gegenecken geschnitten werden, auf einem Hyperboloid.

Auf das umschreibende Tetraeder bezogen, hat die Fläche zweiter Ordnung die Gleichung

$$\alpha_{12} u_1 u_2 + \cdots + \alpha_{34} u_3 u_4 = 0.$$

Die vier Tangentialpunkte der Tetraederfläche haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{auf } g_1: \quad P_1 &\equiv \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3 + \alpha_{14} u_4 = 0,\\
\text{auf } g_2: \quad P_2 &\equiv \alpha_{12} u_1 + \alpha_{23} u_3 + \alpha_{24} u_4 = 0,\\
\text{auf } g_3: \quad P_3 &\equiv \alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{34} u_4 = 0,\\
\text{auf } g_4: \quad P_4 &\equiv \alpha_{14} u_1 + \alpha_{24} u_2 + \alpha_{34} u_3 = 0.
\end{aligned}$$

Der erste Theil des Satzes ist bewiesen, sobald jede Gerade, welche die drei Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ schneidet, zugleich auch durch die vierte $A_4 P_4$ geht.

Jeder Punkt der Geraden $A_i P_i$ hat eine Gleichung von der Form:

$$\Pi_i \equiv \mu_i u_i + P_i = 0.$$

Nimmt man nun auf $A_1 P_1$ einen Punkt

$$\Pi_1 \equiv \mu_1 u_1 + P_1 = 0$$

willkürlich an, und bestimmt zunächst μ_2 so, dass die Gerade von Π_1 nach

$$\Pi_2 \equiv \mu_2 u_2 + P_2 = 0$$

die dritte Gerade $A_3 P_3$ schneidet; dann so, dass $\Pi_1 \Pi_2$ die Gerade $A_4 P_4$ schneidet, so müssen diese Werthe von μ_2 identisch sein.

Damit die Gerade $\Pi_1 \Pi_2$ durch $A_3 P_3$ geht, d. i. einen Punkt von der Form

$$\Pi_3 \equiv \mu_3 u_3 + P_3 = 0$$

enthält, müssen $\mu_2 \mu_3 k l$ so bestimmt werden, dass

$$\Pi_1 \equiv k \Pi_2 = l \Pi_3,$$

indem man die Coefficienten der Coordinaten vergleicht, erhält man hieraus das System:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= k a_{12} + l a_{13}, \\
a_{12} &= k \mu_2 + l a_{23}, \\
a_{13} &= k a_{23} + l \mu_3, \\
a_{14} &= k a_{24} + l a_{34}.
\end{aligned}$$

Die erste und letzte Gleichung liefern:

$$k = \frac{\mu_1 a_{34} - a_{14} a_{13}}{a_{12} a_{34} - a_{24} a_{13}}, \qquad l = \frac{a_{14} a_{12} - \mu_1 a_{24}}{a_{12} a_{34} - a_{24} a_{13}}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt dann:

$$\text{a)} \quad \mu_2 = \frac{a_{12}^2 a_{34} - a_{12} a_{34} a_{13} - a_{23} a_{14} a_{12} + \mu_1 a_{24} a_{23}}{\mu_1 a_{34} - a_{14} a_{13}}.$$

Soll hingegen die Gerade $\Pi_1 \Pi_2$ durch $A_4 P_4$ gehen, so hat man $\mu_2 \mu_4 \varrho \sigma$ gemäss der Identität zu bestimmen:

$$\Pi_1 \equiv \varrho \Pi_2 + \sigma \Pi_4,$$

welche das System liefert:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \varrho a_{12} + \sigma a_{14}, \\
a_{12} &= \varrho \mu_2 + \sigma a_{24}, \\
a_{13} &= \varrho a_{23} + \sigma a_{34}, \\
a_{14} &= \varrho a_{24} + \sigma \mu_4.
\end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung erhält man:

$$\varrho = \frac{\mu_1 a_{34} - a_{13} a_{14}}{a_{12} a_{34} - a_{23} a_{14}}, \qquad \sigma = \frac{a_{13} a_{12} - \mu_1 a_{23}}{a_{12} a_{34} - a_{23} a_{14}}.$$

Substituirt man diese Werthe in die zweite Gleichung, so findet man

b) $$\mu_2 = \frac{a_{12}^2 a_{34} - a_{12} a_{34} a_{14} - a_{24} a_{13} a_{12} + \mu_1 a_{23} a_{24}}{\mu_1 a_{34} - a_{13} a_{14}};$$

dieser Werth ist in der mit dem unter a) berechneten identisch; q. e. d.

Der Beweis für den zweiten Satz verfolgt einen ganz ähnlichen Gang.

Collineation von Punktgeraden, Strahlenbüscheln und Ebenenbüscheln.

§. 1.

Kurze Darstellung der Collineation ohne Benutzung homogener Coordinaten.

1. Die Punkte zweier Geraden, die Geraden zweier Büschel, die Ebenen zweier Büschel sind collinear verwandt, wenn jedem Punkte der einen Geraden ein und nur ein Punkt der andern, jeder Geraden des einen Büschels eine und nur eine des andern, jeder Ebene des einen Büschels eine und nur eine des andern entspricht.

2. Collineare Punktgerade. Um die collineare Verwandtschaft zweier Punktgeraden analytisch auszudrücken, wähle man auf jeder derselben einen Nullpunkt und setze auf jeder eine positive Richtung fest, so dass die Strecke AB zwischen zwei Punkten einer Geraden positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem man von A nach B in der positiven oder in der entgegengesetzten Richtung gelangt. Jeder Punkt der beiden Geraden ist nun eindeutig bestimmt, wenn man Grösse und Vorzeichen seiner Entfernung vom Nullpunkte der betreffenden Geraden angiebt. Die verschiedenen Punkte jeder Geraden mögen durch Indices unterschieden werden und zwar so, dass je zwei entsprechende Punkte denselben Index erhalten; mit P_k (wo k für verschiedene Punkte verschiedene ganze Zahlen bedeutet) mögen die Punkte der einen Geraden, mit P_k' der P_k entsprechende Punkt der andern Geraden bezeichnet werden. Sind A und B die beiden Nullpunkte, so werde AP_k mit y_k, BP_k' mit y_k' bezeichnet.

$$\frac{m}{\sqrt{}} + \frac{a_K x + b_K y - m}{\sqrt{}}$$

R

l_K R

d_K

P

$a_K x + b_K y$:

$$\frac{m}{\sqrt{}} - \frac{a_K x + b_K y - m}{\sqrt{a_K^2 + b_K^2}} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{}} - \frac{a_1}{\sqrt{}} x - \frac{b_1}{\sqrt{}} y = x_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{}} - \frac{a_2}{\sqrt{}} x - \frac{b_2}{\sqrt{}} y = x_2$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{(1)}}, & -\frac{a_1}{\sqrt{}}, & -\frac{b_1}{\sqrt{}} \\ \frac{1}{\sqrt{(2)}}, & -\frac{a_2}{\sqrt{}}, & -\frac{b_2}{\sqrt{}} \\ \frac{1}{\sqrt{(3)}}, & -\frac{a_3}{\sqrt{}}, & -\frac{b_3}{\sqrt{}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{}\sqrt{}\sqrt{}} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$\ldots_n = (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)\overline{X} = R.\overline{x}$

IV. Moments and Centres of Mass.

30. We have seen (in art. 26) that a system of parallel forces F has a centre whose coordinates $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ are determined by the equations

$$\Sigma F . \bar{x} = \Sigma Fx, \quad \Sigma F . \bar{y} = \Sigma Fy, \quad \Sigma F . \bar{z} = \Sigma Fz,$$

where x, y, z are the coordinates of the point of application of the the force F. ~~The products Fx, Fy, Fz are called the mom~~ An important special case is presented by the force of gravitation which acts at a given place near the earth's surface in approximately parallel lines on every particle of matter. We have

The point (x, y, z) determined by these equations is called ~~the centre of mass~~ or Centre of gravity, of the masses $m_1, m_2, \ldots m_n$, ~~or more correctly the centre of mass of the system of masses $m_1 \ldots m_n$~~

34. The product of a mass into its distance from a plane (such as $m_1 x_1$) is called the moment

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\ }} \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{a_1^2+b_1^2} \left\{ (a_2 b_3)\, x_1 + (a_3 b_1)\, x_2 + (a_1 b_2)\, x_3 \right\}$$

$$(a_2 b_3) + (a_3 b_1) + (a_1 b_2) = \sqrt{\ }\ (a_2 b_3)\, x_1 + \cdot + \cdot$$

$$(a_2 b_3) \left[\sqrt{a_1^2+b_1^2}\, x_1 - 1 \right] +$$

Der Definition nach besteht zwischen den y und y' entsprechender Punkte eine Gleichung, die für jede dieser Coordinaten vom ersten Grade ist, also folgende allgemeine Form hat:

$$\text{a)} \qquad ayy' + by + cy' + d = 0.$$

Die Definition und diese Gleichung lehren leicht, dass die Punkte zweier Geraden, welche mit denen einer dritten collinear verwandt sind, auch unter sich in collinearer Verwandtschaft stehen.

3. Die Collineationsgleichung enthält drei unabhängige Constante. Durch jedes gegebene Paar entsprechender Punkte erhält man eine lineare Gleichung der Constanten. Die Collineation zweier Punktreihen ist demnach durch drei Paare entsprechende Punkte bestimmt.

Hieraus folgt: Wenn zwei auf einander liegende Punktreihen collinear sind und drei Paar entsprechende Punkte gemein haben, so sind sie identisch.

Zwei auf einander liegende collineare Punktreihen haben höchstens zwei Paar sich deckende entsprechende Punkte (zwei Doppelpunkte).

Sind $x_1 x_1'$, $x_2 x_2'$, $x_3 x_3'$ die Abstände vom Nullpunkte (Coordinaten) für drei Paar entsprechende Punkte, so ist die Collineationsgleichung:

$$\text{b)} \qquad \begin{vmatrix} x\,x', & x, & x', & 1 \\ x_1 x_1', & x_1 & x_1' & 1 \\ x_2 x_2', & x_2 & x_2' & 1 \\ x_3 x_3', & x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wählt man das eine Paar entsprechende Punkte zu Nullpunkten, so wird in der Collineationsformel a) das Absolutglied d gleich Null, die Gleichung also zu

$$\text{c)} \qquad axx' + bx + cx' = 0.$$

Sind ausser den Nullpunkten noch zwei Paar entsprechende Punkte $x_1 x_1'$, $x_2 x_2'$ gegeben, so folgt aus c) die Collineationsgleichung

$$\text{d)} \qquad \begin{vmatrix} x\,x', & x, & x' \\ x_1 x_1' & x_1 & x_1' \\ x_2 x_2' & x_2 & x_2' \end{vmatrix} = 0.$$

4. Entsprechen sich die Nullpunkte $P_0 P_0'$ und ausserdem die Punktpaare $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$, so ist die Gleichung d) erfüllt:

$$\begin{vmatrix} x_1 x_1', & x_1, & x_1' \\ x_2 x_2', & x_2, & x_2' \\ x_3 x_3', & x_3, & x_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Man multiplicire die zweite Colonne mit x_1', die dritte mit x_1 und subtrahire die erste Colonne von der zweiten und der dritten. Die neue Determinante verschwindet dann gleichfalls:

$$\begin{vmatrix} x_1 x_1', & 0, & 0 \\ x_2 x_2', & x_2 x_1' - x_2 x_2', & x_2' x_1 - x_2 x_2' \\ x_3 x_3', & x_3 x_1' - x_3 x_3', & x_3' x_1 - x_3 x_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante reducirt sich auf die folgende:

$$\begin{vmatrix} x_2 x_1' - x_2 x_2', & x_2' x_1 - x_2 x_2' \\ x_3 x_1' - x_3 x_3', & x_3' x_1 - x_3 x_3' \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. auf die Proportion

$$\text{e)} \qquad \frac{x_2}{x_2 - x_1} : \frac{x_3}{x_3 - x_1} = \frac{x_2'}{x_2' - x_1'} : \frac{x_3'}{x_3' - x_1'},$$

für die man schreiben kann:

$$\text{f)} \qquad \frac{P_2 P_0}{P_2 P_1} : \frac{P_3 P_0}{P_3 P_1} = \frac{P_2' P_0'}{P_2' P_1'} : \frac{P_3' P_0'}{P_3' P_1'}.$$

Sind $ABCD$ vier Punkte einer Geraden, so heisst

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

das Doppelverhältniss der Punkte $ABCD$. Demnach ergiebt sich der Satz:

Sind zwei Punktgerade collinear verwandt, so ist das Doppelverhältniss von vier Punkten der einen Geraden gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Punkte der andern Geraden.

Wird zu drei festen Paaren entsprechender Punkte $P_0 P_0'$, $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$ jedes andere Paar PP' so bestimmt, dass die Doppelverhältnisse von $P_0 P_1 P_2 P$ und $P_0' P_1' P_2' P'$ einander gleich sind, so ist, wenn man $P_0 P_0'$ zu Nullpunkten wählt:

$$\frac{x_2}{x_2 - x_1} : \frac{x}{x - x_1} = \frac{x_2'}{x_2' - x_1'} : \frac{x'}{x' - x_1'}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{vmatrix} x_2 x_1' - x_2 x_2', & x_2' x_1 - x_2 x_2' \\ x\, x_1' - x\, x', & x'\, x_1 - x\, x' \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ergiebt weiter:

$$\begin{vmatrix} x_1 x_1', & 0 & 0 \\ x_2 x_2', & x_2 x_1' - x_2 x_2', & x_2' x_1 - x_2 x_2' \\ x\, x', & x\, x_1' - x\, x', & x'\, x_1 - x\, x' \end{vmatrix} = 0.$$

Fügt man die erste Colonne zur zweiten und dritten und dividirt die **beiden** letzteren durch x_1' und x_1, so folgt

$$\begin{vmatrix} x_1 x_1', & x_1, & x_1' \\ x_2 x_2', & x_2, & x_2' \\ x x', & x, & x' \end{vmatrix} = 0,$$

oder **bei anderer** Anordnung der Zeilen:

$$\begin{vmatrix} x x', & x, & x' \\ x_1 x_1' & x_1 & x_1' \\ x_2 x_2' & x_2 & x_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Demnach gilt die Umkehrung des obigen Satzes:

Wird zu drei Paar entsprechenden Punkten $P_0 P_0'$, $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$ jedes vierte Paar PP' so bestimmt, dass die Doppelverhältnisse $P_0 P_1 P_2 P$ und $P_0' P_1' P_2' P'$ einander gleich sind, so sind die Punktreihen collinear verwandt.

Es ist folglich dann das Doppelverhältniss von irgend vier **Punkten** der einen Geraden gleich dem der vier entsprechenden der **andern** Geraden.

5. Dem unendlich fernen Punkte P_∞ entspricht ein Punkt G', **dessen** Coordinate ist

$$x' = -\frac{b}{a};$$

dem **unendlich** fernen Punkte P'_∞ entspricht G, für welchen:

$$x = -\frac{c}{a}.$$

Diese beiden Punkte $G G'$, welche den unendlich fernen Punkten $P'_\infty P_\infty$ entsprechen, heissen die beiden Gegenpunkte der collinearen Geraden.

6. Das Product der Abstände zweier entsprechenden Punkte von den beiden Gegenpunkten ergiebt:

$$GP . G'P' = \left(x + \frac{c}{a}\right)\left(x' + \frac{b}{a}\right) = xx' + \frac{bx}{a} + \frac{cx'}{a} + \frac{bc}{a^2}.$$

Da nun $xx' + \frac{bx}{a} + \frac{cx'}{a} + \frac{d}{a} = 0$, so folgt:

$$GP . G'P' = \frac{bc - ad}{a^2}. \tag{g}$$

Das Product der Abstände zweier entsprechenden Punkte von den beiden Gegenpunkten ist constant.

Man sieht leicht, dass dieser Satz umkehrbar ist:

Wird zu zwei Punkten zweier Geraden jedes Paar entsprechende Punkte so bestimmt, dass das Product der Abstände je zweier entsprechenden Punkte von den gegebenen Punkten constant ist, so sind die beiden Punktreihen collinear verwandt und die beiden gegebenen Punkte sind die Gegenpunkte der collinearen Reihen.

7. **Gleiche und entgegengesetzt gleiche entsprechende Strecken.**

Um die Enden $P_2 P_2'$ der von zwei entsprechenden Punkten $P_1 P_1'$ ausgehenden gleichen Strecken zu erhalten, hat man $P_2 P_2'$ so zu wählen, dass

$$G P_1 - G P_2 = G' P_1' - G' P_2'.$$

Setzt man abkürzend $G P_1 = p$, $G' P_1' = p'$, so erhält man

$$G' P_2' = p' - p + G P_2.$$

Setzt man dies in

$$G' P_2' \,.\, G P_2 = p \,.\, p'$$

ein, so erhält man:

$$G P_2^2 - (p - p') G P_2 - p p' = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind p und $-p'$.

Die erste Wurzel liefert das unbedeutende Resultat $P_1 P_1 = P_1' P_1'$. Die zweite Wurzel liefert mit Hülfe von g)

$$G' P_2' = -p,$$

und man sieht, dass in der That

$$G P_1 - G P_2 = G' P_1' - G' P_2' = p + p'.$$

Jedem Paar entsprechender Punkte $P_1 P_1'$ ist demnach ein und nur ein Paar entsprechende Punkte $P_2 P_2'$ so zugeordnet, dass die Strecken $P_2 P_1$ und $P_2' P_1'$ einander gleich sind.

Für die Endpunkte $P_2 P_2'$ entgegengesetzt gleicher von $P_1 P_1'$ ausgehender Strecken ist

$$G P_1 - G P_2 = -(G' P_1' - G' P_2')$$
$$G' P_2' = p' + p - G P_2$$
$$G P_2^2 - (p' + p) G P_2 + p p' = 0.$$

Diese Gleichung hat ausser der nichtssagenden Wurzel p die Wurzel

$$G P_2 = p'.$$

Hieraus folgt

$$G' P_2' = p,$$

so dass in der That

$$GP_1 - GP_2 = -(G'P_1' - G'P_2') = p - p'.$$

Jedem Paar entsprechende Punkte $P_1 P_1'$ ist ein und nur ein Paar entsprechende Punkte $P_2 P_2'$ so zugeordnet, dass die Strecken $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ entgegengesetzt gleich sind.

Ist $bc - ad$ positiv oder negativ, so haben GP und $G'P'$ für jede zwei entsprechende Punkte gleiche oder ungleiche Zeichen. Im erstern Falle schliessen je zwei gleiche entsprechende Strecken die Gegenpunkte ein, und je zwei entgegengesetzt gleiche Strecken schliessen dieselben aus; im zweiten Falle liegen G und G' innerhalb von je zwei entgegengesetzt gleichen Strecken und ausserhalb von je zwei gleichen Strecken.

8. Wenn von zwei collinearen auf einander liegenden Punktgeraden ein Paar entsprechende Punkte sich decken, so deckt sich stets noch ein und nur noch ein Paar entsprechende Punkte. Oder:

Wenn zwei auf einander liegende collineare Punktreihen einen Doppelpunkt haben, so haben sie stets und nur noch einen Doppelpunkt.

Denn wenn P_1 und P_1' sich decken und es fallen die positiven Richtungen der beiden Geraden zusammen, so decken sich die beiden von dem Doppelpunkte $P_1 P_1'$ ausgehenden gleichen entsprechenden Strecken, ihr gemeinsamer Endpunkt enthält das zweite Paar sich deckende entsprechende Punkte.

Fallen die positiven Richtungen nicht zusammen, so decken sich die vom Doppelpunkte $P_1 P_1'$ ausgehenden entgegengesetzt gleichen Strecken, und ihr Endpunkt liefert den zweiten Doppelpunkt.

Sind zwei auf einander liegende Punktreihen auf denselben Nullpunkt bezogen und haben sie die positive Richtung gemein, so sind die Coordinaten der Doppelpunkte die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

h) $$ax^2 + (b + c)x + d = 0.$$

In Uebereinstimmung mit dem oben Erörterten liefert diese Gleichung zwei Doppelpunkte oder keinen Doppelpunkt. In einem speciellen Falle können die beiden reellen Wurzeln zusammenfallen.

Sind die positiven Richtungen gemeinsam, so tritt dieser Fall dann ein, wenn der invariante Quotient $\frac{bc - ad}{a^2}$ negativ ist und wenn die beiden Punkte auf einander gelegt werden, für

welche $p = -p'$. Denn dann sind die von ihnen ausgehenden entsprechend gleichen Strecken gleich Null, Anfangs- und Endpunkte fallen in einen Punkt.

9. Aehnliche Punktreihen. Ist in der Collineationsgleichung der Coefficient des ersten Gliedes Null, so sind die Punktreihen ähnlich.

Es haben dann zwei entsprechende Strecken ein constantes Verhältniss; an die Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse tritt die Gleichheit der einfachen Verhältnisse:

$$P_2 P_0 : P_2 P_1 = P_2' P_0 : P_2' P_1'.$$

In ähnlichen Punktreihen entsprechen sich die unendlich fernen Punkte; die Gegenpunkte liegen unendlich fern.

Auf einander liegende ähnliche Punktreihen haben stets einen Doppelpunkt; haben sie denselben Nullpunkt und gleiche positive Richtung, so erhält man dessen Coordinate aus

$$(b + c)x + d = 0.$$

Der Doppelpunkt ist unendlich fern, wenn $b = -c$; in diesem Falle sind je zwei entsprechende Strecken entgegengesetzt gleich, die beiden Punktreihen gleichsinnig congruent.

Dieses Resultat lässt sich mit dem entsprechenden bei nicht ähnlichen collinearen Reihen vereinigen; denn die unendlich fernen Punkte einer Geraden (die hier nur als ein Punkt zu zählen sind) liegen auf einander und entsprechen sich, bilden also den zweiten Doppelpunkt ähnlicher Reihen.

10. Involutorische Punktreihen. Zwei collineare auf einander liegende Punktreihen sind involutorisch oder in Involution, wenn jedem Punkte Π des Trägers (d. i. der Geraden, auf welcher die beiden Punktreihen liegen) ein und derselbe Punkt Π_1 entspricht, gleichviel, ob man Π als einen Punkt des ersten oder des zweiten Systems ansieht.

Hieraus folgt, dass bei involutorischen Punktreihen die Gegenpunkte zusammenfallen. Es ist demnach

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a}, \quad \text{d. i. } b = c.$$

Die Collineationsgleichung wird demnach zu

$$\text{i)} \qquad a x x' + b(x + x') + d = 0.$$

Die nach dieser Gleichung bestimmten entsprechenden Punkte genügen der obigen Definition; denn die Gleichung ist symmetrisch für x und x'.

Sind demnach bei zwei auf einander liegenden gleichgerichteten collinearen Punktreihen die Gegenpunkte in einem Punkte des Trägers vereint, so befinden sich die Punktreihen in Involution.

Der gemeinsame Gegenpunkt zweier involutorischen Reihen heisst der **Centralpunkt** derselben.

Zwei involutorische Punktreihen sind durch zwei Paar entsprechende Punkte bestimmt. Sind $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$ als Paare entsprechender Punkte zweier involutorischer Reihen gegeben, so ist die Involutionsgleichung für die Coordinaten von je zwei entsprechenden Punkten:

$$\text{k)} \qquad \begin{vmatrix} x\,x', & (x + x'), & 1 \\ x_1 x_1' & (x_1 + x_1') & 1 \\ x_2 x_2' & (x_2 + x_2') & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist C der Centralpunkt, so gilt für je zwei entsprechende Punkte

$$\text{l)} \qquad CP \, . \, CP' = \frac{b^2 - ad}{a^2}.$$

Je nachdem $b^2 - ad$ positiv oder negativ ist, haben die beiden Reihen zwei oder keinen Doppelpunkt.

Sind zwei Doppelpunkte vorhanden, so sind ihre Coordinaten die beiden Werthe von

$$\sqrt{\frac{b^2 - ad}{a^2}},$$

mithin ist der Centralpunkt die Mitte der beiden sich deckenden entsprechenden Strecken.

Sind A und B die beiden Doppelpunkte und P und P' zwei entsprechende Punkte, so folgt aus dem Umstande, dass den Punkten P und P', als Punkte der einen Reihe betrachtet, die Punkte P' und P der andern Reihe entsprechen (nach der Definition zweier involutorisch verwandten Reihen), die Beziehung:

$$\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = \frac{P'A}{P'B} : \frac{PA}{PB}.$$

Dies ist nur möglich, wenn

$$\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = \pm 1.$$

Da nun P und P' zwei verschiedene Punkte sind, so kann das Doppelverhältniss der Punkte $ABPP'$ den Werth $+1$ nicht haben; es ist demnach:

$$\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = -1.$$

Dies ergiebt den Satz:

In zwei aufeinander liegenden involutorischen Punktreihen mit zwei Doppelpunkten ist jedes Paar entsprechende Punkte den Doppelpunkten harmonisch conjugirt.

Man sieht leicht, dass man diese Schlussfolgerungen umkehren kann; es folgt dann der Satz:

Wenn man zwei Punktreihen auf derselben Geraden so construirt, dass jedes Paar entsprechende Punkte einem festen Punktpaare harmonisch conjugirt ist, so sind die beiden Punktreihen in Involution und haben das feste Punktpaar zu Doppelpunkten.

11. Collineare Geradenbüschel. Um die Collineation zweier Geradenbüschel analytisch auszudrücken, hat man die Lage der Geraden eines Büschels durch ein Bestimmungsstück (Coordinate in weitester Bedeutung) zu charakterisiren, das so beschaffen sein muss, dass zu jeder Geraden des Büschels ein und nur ein Werth der Coordinate, und zu jeder zwischen $-\infty$ bis $+\infty$ enthaltenen Coordinate eine und nur eine Gerade gehört.

Hierzu empfiehlt sich z. B. das Verhältniss der Abstände einer Geraden von zwei festen Punkten, die mit dem Büschelcentrum nicht in derselben Geraden liegen; wobei man dieses Verhältniss positiv oder negativ zu nehmen hätte, je nachdem die Gerade bei dem Punkte auf derselben oder auf verschiedenen Punkten der Geraden liegen. Diese Bestimmungsweise schliesst sich den homogenen Plancoordinaten an.

Ebenso verwendbar ist die Tangente (oder Cotangente) des Winkels, den die Gerade mit einer beliebig gewählten Büschelgeraden (der Nullgeraden) bildet, wobei eine Drehungsrichtung für positive Winkel, die entgegengesetzte für negative Winkel zu verwenden ist.

In den folgenden Untersuchungen wird von dieser letztern Bestimmungsweise Gebrauch gemacht.

12. Sind v und v' die Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen T und T' mit den Nullstrahlen der Büschel bilden, so ist der analytische Ausdruck für die Collineation der Strahlen der beiden Büschel die Collineationsgleichung:

a) $$avv' + bv + cv' + d = 0.$$

Die Collineation ist demnach durch drei Paar entsprechende Strahlen bestimmt.

Sind die entsprechenden Strahlenpaare $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$, $T_3 T_3'$ gegeben, so ist die Collineationsgleichung

b)
$$\begin{vmatrix} v\,v', & v, & v', & 1 \\ v_1 v_1' & v_1 & v_1' & 1 \\ v_2 v_2' & v_2 & v_2' & 1 \\ v_3 v_3' & v_3 & v_3' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Nullstrahlen entsprechend, so lautet die Collineationsgleichung

c)
$$avv' + bv + cv' = 0.$$

Sind noch ausserdem zwei Paar entsprechende Strahlen $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$ gegeben, so erhält man die Gleichung in Determinantenform:

d)
$$\begin{vmatrix} v\,v', & v, & v' \\ v_1 v_1' & v_1 & v_1' \\ v_2 v_2' & v_2 & v_2' \end{vmatrix} = 0.$$

13. Aus der Gleichung d) gewinnt man die Gleichung

$$\frac{v_2}{v_2 - v_1} : \frac{v_3}{v_3 - v_1} = \frac{v_2'}{v_2' - v_1'} : \frac{v_3'}{v_3' - v_1}.$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$\sin \widehat{T_i T_k} = \frac{v_k - v_i}{\sqrt{1 + v_i^2} \,.\, \sqrt{1 + v_k^2}}, \quad \sin T_0 T_k = \frac{v_k}{\sqrt{1 + v_k^2}},$$

wobei von $\sqrt{1 + v^2}$ der negative oder positive Werth zu nehmen ist, je nachdem *arctan* v zwischen 90^0 und 270^0 liegt oder nicht, so ergiebt die obige Gleichung:

e)
$$\frac{\sin \widehat{T_2 T_0}}{\sin \widehat{T_2 T_1}} : \frac{\sin \widehat{T_3 T_0}}{\sin \widehat{T_3 T_1}} = \frac{\sin \widehat{T_2' T_0'}}{\sin \widehat{T_2' T_1'}} : \frac{\sin \widehat{T_3' T_0'}}{\sin \widehat{T_3' T_1'}}.$$

Der Quotient

$$\frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{DA}} : \frac{\sin \widehat{CB}}{\sin \widehat{DB}}$$

heisst das Doppelverhältniss der vier Geraden $ABCD$. Demnach lehrt die Gleichung e):

In zwei collinearen Büscheln ist das Doppelverhältniss von je vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Strahlen des andern Büschels.

Man kann diesen Satz umkehren und erhält:

Wenn jedes Paar entsprechender Strahlen TT' zweier Büschel zu drei Paar entsprechenden Strahlen $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$, $T_3 T_3'$ so bestimmt wird, dass das Doppelverhältniss

der Strahlen $T_1\, T_2\, T_3\, T$ gleich dem der Strahlen $T_1'\, T_2'\, T_3'\, T'$ ist, so sind die beiden Büschel collinear verwandt; es ist dann das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Strahlen des andern Büschels.

14. **Gegenstrahlen.** Aus der Collineationsgleichung

$$avv' + bv + cv' = 0$$

folgen die zusammengehörigen Werthe

$$v = \infty, \quad v' = -\frac{c}{a}$$

$$v' = \infty, \quad v = -\frac{b}{a}.$$

Dieselben lehren, dass zwei rechtwinklige Strahlen des einen Büschels im Allgemeinen zwei nicht rechtwinkligen des andern entsprechen.

Denn die Gleichung zwischen den Coordinaten zweier entsprechenden Strahlen ist für jedes beliebige Paar entsprechender Nullstrahlen von der Form c); und für die Normale zum Nullstrahl in jedem Büschel ist die Coordinate als Tangente eines rechten Winkels unendlich gross.

Es kann daher nur eine beschränkte Anzahl entsprechende rechte Winkel geben. Man erhält dieselben, wenn man die Collineationsgleichung zu solchen Nullstrahlen transformirt, für welche der Coefficient des Products der Coordinaten verschwindet.

Haben die neuen Nullstrahlen die Coordinaten m und m', so dass

$$\text{f)} \qquad amm' + bm + cm' = 0,$$

so sind v und v' zu ersetzen durch $\frac{v - m}{1 + vm}$ und $\frac{v' - m'}{1 + v'm'}$, wenn die in diesen Quotienten enthaltenen Werthe v und v' die Coordinaten zweier entsprechenden Strahlen in Bezug auf die neuen Nullstrahlen sind.

Durch diese Substitutionen erhält man die Collineationsgleichung für die neuen Nullstrahlen zunächst in der Form:

$$a\frac{(v - m)(v' - m')}{(1 + vm)(1 + v'm')} + b\frac{v - m}{1 + vm} + c\frac{v' - m'}{1 + v'm'} = 0.$$

Erweitert man dieselbe mit $(1 + vm)(1 + v'm')$ und berücksichtigt f), so erscheint sie unter der Form

$$Avv' + Bv + Cv' = 0,$$

worin sich vorfindet

g) $$A = a + bm' + cm.$$

Die Coordinaten der Strahlen, deren Normalen sich entsprechen, sind demnach die Wurzeln des Systems

h) $$\begin{aligned} amm' + bm + cm' &= 0 \\ a + bm' + cm &= 0. \end{aligned}$$

Sind nun $m_1 m_1'$ ein Wurzelsystem von h), so sind $\frac{1}{m_1}$ und $\frac{1}{m_1'}$ das zweite System; denn es ist:

$$a\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{m_1'} + b\frac{1}{m} + c\frac{1}{m'} = \frac{1}{m_1 m_1'}(a + bm_1' + cm_1) = 0$$

$$a + b\frac{1}{m_1} + c\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1 m}(am_1 m_1' + bm_1 + cm_1') = 0.$$

Da nun zwei Strahlen, deren Coordinaten reciprok sind, rechte Winkel bilden, so folgt der Satz:

In zwei collinearen Strahlenbüscheln giebt es im Allgemeinen nur ein Paar entsprechende rechte Winkel.

Diese entsprechenden Normalstrahlen mögen mit $G_1\, G_2\, G_1'\, G_2'$ bezeichnet und als Gegenstrahlen der beiden Büschel angeführt werden.

Werden demnach zwei entsprechende Gegenstrahlen als Nullstrahlen gewählt, so ist die Collineationsgleichung:

i) $$bv + cv' = 0.$$

15. Wählt man zwei nicht entsprechende Gegenstrahlen, z. B. G_1 und G_2', zu Nullstrahlen, so sind der Winkel $G_1'\, T_1'$ und $(-\, G_2'\, T_1)$ complementär; mithin erhält man die Collineationsgleichung, wenn man in i) die auf G_1' bezogene Coordinate durch das negative Reciproke der auf G_2' bezogenen ersetzt; bezeichnet man diese Coordinate wieder mit v', so erfolgt die Collineationsgleichung mit den Nullstrahlen $G_1\, G_2'$

k) $$bvv' - c = 0.$$

Hieraus folgt der Satz:

Die Tangenten der Winkel zweier entsprechenden Strahlen mit zwei nichtentsprechenden Gegenstrahlen haben ein constantes Product. Oder: Die Tangenten der Winkel zweier entsprechenden Strahlen mit zwei entsprechenden Gegenstrahlen haben ein constantes Verhältniss.

16. Entsprechende gleiche und entgegengesetzt gleiche Winkel. Um die Strahlen zu finden, die mit den entsprechenden Strahlen $T_1\,T_1'$ gleiche Winkel bilden, nehme man $T_1\,T_1'$ zu Nullstrahlen; die Collineationsgleichung sei alsdann

$$avv' + bv + cv' = 0.$$

Für die gesuchten Strahlen ist $v = v'$; mithin sind dieselben die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$av^2 + (b + c)v = 0.$$

Dieselbe liefert ausser der nichtssagenden Lösung $v = 0$ noch eine Wurzel

$$v = -\frac{b + c}{a}$$

und lehrt:

Jedem Paare entsprechender Strahlen ist ein und nur ein Paar entsprechende Strahlen so conjugirt, dass die beiden Strahlen des einen Systems denselben Winkel einschliessen, wie die entsprechenden Strahlen des andern.

Um die entsprechenden Strahlen zu erhalten, welche mit $T_1\,T_1'$ entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, hat man in

$$avv' + bv + cv' = 0$$

zu setzen $v' = -v$.

Demnach folgt v aus der Gleichung

$$-av^2 + (b - c)v = 0,$$

welche nur die eine brauchbare Wurzel hat:

$$v = \frac{b - c}{a}.$$

Hieraus folgt:

Je einem Paare entsprechender Strahlen ist ein und nur ein Paar entsprechende Strahlen so conjugirt, dass der Winkel der Strahlen des einen Büschels dem Winkel der entsprechenden Strahlen entgegengesetzt gleich ist.

17. Doppelstrahlen concentrischer collinearer Büschel.

Aus den Sätzen der vorhergehenden Nummer folgt:

Haben zwei auf einander liegende collineare Büschel ein Paar sich deckende Strahlen (Doppelstrahlen), so haben sie noch ein Paar sich deckende Strahlen.

Denn decken sich T_1 und T_1' und fallen die positiven Richtungen der Büschel zusammen, so decken sich die beiden entsprechenden Strahlen $T_2\, T_2'$, für welche

$$\widehat{T_2 T_1} = \widehat{T_2' T_1'},$$

welche stets und nur ein Mal vorhanden sind. Fallen hingegen die positiven Richtungen der Büschel nicht zusammen, so decken sich die Strahlen $T_3\, T_3'$, für welche

$$\widehat{T_3 T_1} = - \widehat{T_3' T_1'},$$

welche ebenfalls stets und nur ein Mal auftreten.

Zwei concentrische collineare Büschel können durch Drehung in der Ebene sowie durch Umwenden im Raume und nachherige Drehung in der Ebene auf unzählige verschiedene Weisen in eine solche gegenseitige Lage gebracht werden, dass sie zwei Doppelstrahlen besitzen.

Denn vollendet das eine Büschel eine Umdrehung, so kommt nach einander jedes Paar entsprechende Strahlen zur Deckung; in jedem solchen Falle lässt sich der obige Satz anwenden.

Werden zwei auf einander liegende Büschel auf dieselbe Nullgerade bezogen, so lautet die Collineationsgleichung

$$avv' + bv + cv' + d = 0;$$

dieselbe liefert Doppelstrahlen für $v = v'$, also sind die Coordinaten derselben die Wurzeln der Gleichung

$$av^2 + (b + c)v + d = 0.$$

Hieraus folgt, dass stets zwei Doppelstrahlen oder kein Doppelstrahl vorhanden sind; letztere tritt ein, wenn

$$(b + c)^2 - 4ad < 0.$$

18. Involutorische Büschel. Die Strahlen von zwei concentrischen collinearen Büscheln sind involutorisch oder in Involution, wenn jeder durch das gemeinsame Centrum gelegten Geraden T derselbe Strahl entspricht, wenn man T zum ersten oder zum zweiten Systeme rechnet.

Bezieht man die Büschel auf denselben Nullstrahl und giebt ihnen dieselbe positive Richtung, so tritt dies dann und nur dann ein, wenn die Collineationsgleichung für v und v' symmetrisch ist. Demnach ist die Gleichung für die Coordinaten involutorischer Büschel, bezogen auf denselben Nullstrahl, von der Form:

$$1) \qquad avv' + b(v + v') + d = 0.$$

Wählt man einen neuen Nullstrahl, der gegen den ursprünglichen die Coordinate m hat, so erhält man die Involutionsgleichung für diesen neuen Strahl, indem man v und v' durch

$$\frac{v - m}{1 + vm} \text{ und } \frac{v' - m}{1 + v'm}$$

ersetzt. Die neue Gleichung lautet demnach:

$$a(v - m)(v' - m) + b[(v - m)(1 + v'm) + (v' - m)(1 + vm)] + d(1 + vm)(1 + v'm) = 0.$$

Diese Gleichung ist ebenfalls symmetrisch für v und v'; sie bestätigt, dass die involutorische Lage der Büschel von der Wahl des Nullstrahls nicht abhängt, und dass in Bezug auf jeden beliebigen Nullstrahl die Coordinaten entsprechender Strahlen eine Gleichung von der Form wie k) erfüllen.

Aus der Definition und den vorhergehenden Sätzen ersieht man ferner, dass hier je zwei entgegengesetzt gleiche entsprechende Winkel sich so decken, dass die nicht entsprechenden Schenkel auf einander liegen.

Insbesondere decken sich je zwei nichtentsprechende Gegenstrahlen.

Man kann diesen letztern Satz auch umkehren:

Decken sich in zwei concentrischen collinearen Büscheln zwei nichtentsprechende Gegenstrahlen (also auch die beiden andern), so sind die Büschel in Involution.

Denn wählt man zwei auf einander liegende nichtentsprechende Gegenstrahlen zu Nullstrahlen, so lautet die Collineationsgleichung (Nr. 15, k)

$$bvv' - c = 0$$

und ist also in der That symmetrisch für v und v'.

Die letztere Gleichung liefert für $v = v'$ die Coordinaten der Doppelstrahlen involutorischer Büschel und lehrt:

Zwei involutorische Büschel haben zwei oder keine Doppelstrahlen. Sind Doppelstrahlen vorhanden, so liegen sie symmetrisch gegen je zwei nichtentsprechende Gegenstrahlen.

Die Involution ist durch zwei Paar entsprechende Strahlen bestimmt; sind deren Coordinaten $v_1 v_1', v_2 v_2'$, so lautet die Involutionsgleichung

m) $$\begin{vmatrix} v\, v', & v + v', & 1 \\ v_1 v_1' & v_1 + v_1' & 1 \\ v_2 v_2' & v_2 + v_2' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

19. Collineare Ebenenbüschel. Alles hier über collineare und involutorische Geradenbüschel Gesagte lässt sich auch auf Ebenenbüschel anwenden. Nur hat man überall für Strahl oder Gerade zu setzen Ebene, für Büschelcentrum Büschelaxe (gemeinschaftliche Gerade der Ebenen des Büschels), für concentrische Büschel coaxiale Büschel.

20. Zwei Paar involutorische Elemente $E_1 E_1'$, $E_2 E_2'$ (Punkte, Geraden, Ebenen) zweier auf einander liegenden collinearen Gebilde der besprochenen Art (Geraden, Büschel) sind involutorisch, wenn E_1 und E_2', sowie E_2 und E_1' sich decken, in Uebereinstimmung mit der obigen Definition der Involution der ganzen Gebilde. Sind $z z'$ die Coordinaten der Elemente, bezogen auf dasselbe Nullelement, so sind zwei involutorische Paare vorhanden, wenn die Collineationsgleichung

$$a z z' + b z + c z' + d = 0$$

erfüllt wird für $z = z_1$, $z' = z_1'$, sowie für

$$z_2 = z_1', \quad z_2' = z_1.$$

Hieraus folgt für z_1 und z_1' der Verein der Gleichungen:

$$a z_1 z_1' + b z_1 + c z_1' + d = 0$$
$$a z_1' z_1 + b z_1' + c z_1 + d = 0.$$

Die Differenz dieser Gleichungen liefert:

$$(b - c)(z_1 - z_1') = 0.$$

Dies ergiebt

$$b - c = 0, \text{ oder } z_1 - z_1' = 0.$$

Demnach kommen involutorische Paare bei collinearen Gebilden im Allgemeinen nicht vor (denn die Lösung $z_1 = z_1'$ ist unbedeutend); nur bei involutorischen Gebilden treten sie auf und zwar in unendlich grosser Anzahl.

21. Folgender Satz ist für die Untersuchung von Büscheln oder Schaaren von Flächen zweiter Ordnung brauchbar.

Sind die eindeutigen Coordinaten $z z'$ der entsprechenden Elemente zweier auf einander liegenden collinearen Gebilde der obigen Art so beschaffen, dass sie einer quadratischen Gleichung der Form genügen:

n) $$\lambda (a_1 z^2 + b_1 z + c_1) + \mu (a_2 z^2 + b_2 z + c_2) = 0,$$

worin $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$ gegebene, $\lambda \mu$ willkürlich variable Zahlen sind, so sind die beiden Gebilde in Involution.

Denn seien $z_1 z_1'$, $z_2 z_2'$, $z_3 z_3'$ die Coordinaten von drei entsprechenden Elementpaaren, und sind $\lambda_k \mu_k$ die Werthe von λ und μ,

für welche die Gleichung n) die Wurzeln $z_k z_k'$ gewinnt, so ist nach der Voraussetzung und nach n):

$$\text{o)}\quad \begin{aligned} z_k z_k' &= \frac{\lambda_k c_1 + \mu_k c_2}{\lambda_k a_1 + \mu_k a_2} \\ z_k + z_k' &= -\frac{\lambda_k b_1 + \mu_k b_2}{\lambda_k a_1 + \mu_k a_2}. \end{aligned}$$

Da nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2}{\lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2}, & \frac{\lambda_1 b_1 + \mu_1 b_2}{\lambda_1 a_1 + \mu_1 a_2}, & 1 \\ \frac{\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2}{\lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2}, & \frac{\lambda_2 b_1 + \mu_2 b_2}{\lambda_2 a_1 + \mu_2 a_2}, & 1 \\ \frac{\lambda_3 c_1 + \mu_3 c_2}{\lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2}, & \frac{\lambda_3 b_1 + \mu_3 b_2}{\lambda_3 a_1 + \mu_3 a_2}, & 1 \end{vmatrix}$$

unabhängig von den Werthen $\lambda_k \mu_k$, $a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$ verschwindet, und dieselbe nach n) identisch ist mit

$$\begin{vmatrix} z_1 z_1', & (z_1 + z_1'), & 1 \\ z_2 z_2', & (z_2 + z_2'), & 1 \\ z_3 z_3', & (z_3 + z_3'), & 1 \end{vmatrix}$$

so erfüllen demnach die Coordinaten von je drei Paaren entsprechenden Elementen die Bedingungsgleichung der Involution, q. e. d.

§. 2.

Darstellung der Collineation mit Benutzung homogener Coordinaten.

22. Sind $x_{k1} x_{k1}'$, $x_{k2} x_{k2}'$, $x_{k3} x_{k3}'$ die Coordinaten dreier entsprechenden Punkte einer Geraden in der Ebene ($k = 1, 2, 3$) oder im Raume ($k = 1, 2, 3, 4$), bestimmt man ferner $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$ so, dass

$$\begin{aligned} x_{k3} &= \alpha_1 x_{k1} + \alpha_2 x_{k2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ x_{k3}' &= \beta_1 x_{k1}' + \beta_2 x_{k2}', \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \end{aligned}$$

und bildet die Coordinaten für je zwei entsprechende Punkte nach den Formeln

a)
$$x_k = \frac{\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2}}{\sigma}$$
$$x'_k = \frac{\lambda_1 \beta_1 x_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x_{k2}}{\tau},$$
$$\sigma = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2, \quad \tau = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2,$$

so sind die beiden Punktgeraden collinear verwandt.

Denn nach früheren Sätzen gelten die Gleichungen:

$$\frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha}, \quad \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{\lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1 \alpha_1},$$
$$\frac{P_1' P_3'}{P_3' P_2'} = \frac{\beta_2}{\beta}, \quad \frac{P_1' P'}{P' P_2'} = \frac{\lambda_2 \beta_2}{\lambda_1 \beta_1},$$

mithin ergiebt sich die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} : \frac{P P_1}{P P_2} = \frac{P_3' P_1'}{P_3' P_2'} : \frac{P' P_1'}{P' P_2'} \left(= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right);$$

demnach sind die Punktreihen collinear.

Da hierbei drei willkürliche Paare entsprechende Punkte auftreten, so wird hierdurch der allgemeine Fall der Collineation zweier Punktreihen dargestellt.

23. Ebenso beweist man folgende Sätze:

Sind $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$, $T_3 T_3'$ drei Paar Gerade zweier Büschel, bestimmt man ferner $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ so, dass

$$u_{k3} = a_1 u_{k1} + a_2 u_{k2}, \quad a_1 + a_2 = 1,$$
$$u'_{k3} = b_1 u'_{k1} + b_2 u'_{k2}, \quad b_1 + b_2 = 1,$$

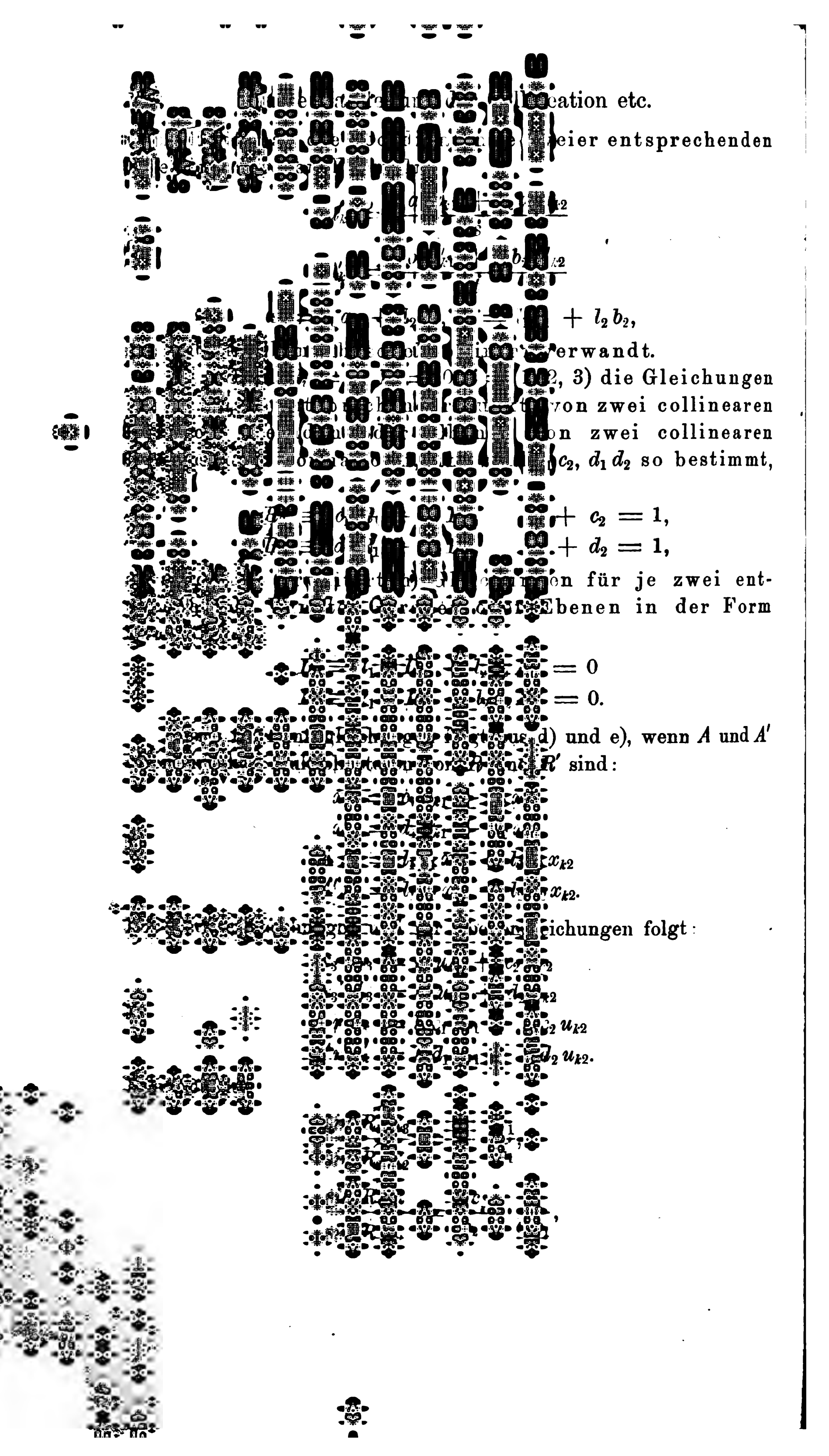
und bildet man die Coordinaten für je zwei entsprechende Strahlen nach den Formeln

b)
$$u_k = \frac{l_1 a_1 u_{k1} + l_2 a_2 u_{k2}}{s}$$
$$u'_k = \frac{l_1 b_1 u'_{k1} + l_2 b_2 u'_{k2}}{t}$$
$$s = l_1 a_1 + l_2 a_2, \quad t = l_1 b_1 + l_2 b_2,$$

so sind die beiden Büschel collinear verwandt; es ist auf diese Weise der allgemeine Fall der Collineation dargestellt.

Sind $u_{k1} u'_{k1}$, $u_{k2} u'_{k2}$, $u_{k3} u'_{k3}$ die Coordinaten dreier Ebenen eines Büschels, bestimmt man $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ so, dass

$$u_{k3} = a_1 u_{k1} + a_2 u_{k2}, \quad a_1 + a_2 = 1,$$
$$u'_{k3} = b_1 u'_{k1} + b_2 u'_{k2}, \quad b_1 + b_2 = 1,$$



$$\frac{\sin \widehat{R_1' R_3'}}{\sin \widehat{R_3' R_2'}} = \frac{d_2}{r_2'} \cdot \frac{r_1'}{d_1}$$

$$\frac{\sin \widehat{R_1' R'}}{\sin \widehat{R' R_2'}} = \frac{l_2 d_2}{r_2'} \cdot \frac{r_1'}{l_1 d_1}.$$

Hieraus folgt das Merkmal collinearer Büschel:

$$\frac{\sin \widehat{R_2 R_1}}{\sin \widehat{R_3 R_2}} : \frac{\sin \widehat{R R_1}}{\sin \widehat{R R_2}} = \frac{\sin \widehat{R_3' R_1'}}{\sin \widehat{R_3' R_2'}} : \frac{\sin \widehat{R' R_1'}}{\sin \widehat{R' R_2'}}.$$

25. Zwei collineare Punktreihen werden von je zwei beliebigen Punkten aus durch collineare Büschel projicirt; in denselben entsprechen sich die Projicirenden entsprechender Punkte.

Man denke sich zwei collineare Punktgerade beliebig im Raum und von zwei beliebigen Raumpunkten aus projicirt. Man lege durch jedes Projectionscentrum und die von ihm aus projicirte Gerade eine Ebene und bringe diese beiden Ebenen zur Deckung. Statt in der frühern allgemeinern Lage kann man die Collineation auch in der neuen bequemeren untersuchen.

Auf ein beliebiges Axendreieck der gemeinsamen Ebene bezogen, seien $\xi_k \xi_k'$ die Coordinaten der Projectionscentra, $x_1 x_1'$, $x_2 x_2'$, $x_n x_n'$ die Coordinaten von drei Paaren entsprechender Punkte. Dann sind die Gleichungen der Projectionsstrahlen je zweier entsprechenden Punkte:

$$\text{h)} \quad \begin{aligned} T &\equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_1 \alpha_1 x_{11} + \lambda_2 \alpha_2 x_{12}, & \lambda_1 \alpha_1 x_{21} + \lambda_2 \alpha_2 x_{22}, & \lambda_1 \alpha_1 x_{31} + \lambda_2 \alpha_2 x_{32} \end{vmatrix} = 0 \\ T' &\equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ \lambda_1 \beta_1 x_{11}' + \lambda_2 \beta_2 x_{12}', & \lambda_1 \beta_1 x_{21}' + \lambda_2 \beta_2 x_{22}', & \lambda_1 \beta_1 x_{31}' + \lambda_2 \beta_2 x_{32}' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Sind $A_i A_i'$ die Multiplicatoren, durch welche die Gleichungen der Punkte $\xi_k x_{ki}$ und $\xi_k' x_{ki}'$ von der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_{1i} & x_{2i} & x_{3i} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' \\ x_{1i}' & x_{2i}' & x_{3i}' \end{vmatrix} = 0$$

auf die Normalform gebracht werden, und bezeichnet man dieselbe für $\xi_k x_{ki}$ mit T_i, für $\xi_k' x_{ki}'$ mit T_i', so erhält man aus h), wenn man rechts mit A_3 und A_3' dividirt:

$$T \equiv \lambda_1 \frac{\alpha_1}{A_1 A_3} T_1 + \lambda_2 \frac{\alpha_2}{A_2 A_3} T_2 = 0$$

$$T' \equiv \lambda_1 \frac{\beta_1}{A_1' A_3'} T_1' + \lambda_2 \frac{\beta_2}{A_2' A_3'} T_2' = 0$$

$$T_3 \equiv \frac{\alpha_1}{A_3} T_1 + \frac{\alpha_2}{A_3} T_2 = 0$$

$$T_3' \equiv \frac{\beta_1}{A_3'} T_1' + \frac{\beta_2}{A_3'} T_2' = 0,$$

in Uebereinstimmung mit dem Satze Nr. 24.

26. **Zwei collineare Punktreihen werden von beliebigen Axen aus durch zwei collineare Ebenenbüschel projicirt; es entsprechen sich dabei die Ebenen, welche entsprechende Punkte projiciren.**

Seien $\xi_{k1}\,\xi_{k2}$ die Coordinaten für zwei Punkte der einen, $\xi'_{k1}\,\xi'_{k2}$ zwei Punkte der andern Axe, $x_k\,x'_k$ die Coordinaten entsprechender Punkte der beiden collinearen Geraden, so sind die Gleichungen für die projicirenden Ebenen zweier entsprechender Punkte:

$$\text{i)}\quad T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \xi_{11} & \xi_{21} & \xi_{31} & \xi_{41} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \xi_{32} & \xi_{42} \\ \lambda_1\alpha_1 x_{11} + \lambda_2\alpha_2 x_{12}, & \lambda_1\alpha_1 x_{21} + \lambda_2\alpha_2 x_{22}, & \lambda_1\alpha_1 x_{31} + \lambda_2\alpha_2 x_{32}, & \lambda_1\alpha_1 x_{31} + \lambda_2\alpha_2 x_{42} \end{vmatrix}$$

$$T' \equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ \xi'_{11} & \xi'_{21} & \xi'_{31} & \xi'_{41} \\ \xi'_{12} & \xi'_{22} & \xi'_{32} & \xi'_{42} \\ \lambda_1\beta_1 x'_{11} + \lambda_2\beta_2 x'_{12}, & \lambda_1\beta_1 x'_{21} + \lambda_2\beta_2 x'_{22}, & \lambda_1\beta_1 x'_{31} + \lambda_2\beta_2 x'_{32}, & \lambda_1\beta_1 x'_{41} + \lambda_2\beta_2 x'_{42} \end{vmatrix}$$

Sind $T_i = 0$, $T'_i = 0$ die Gleichungen der Ebenen $\xi_{k1}\,\xi_{k2}\,x_{ki}$ und $\xi'_{k1}\,\xi'_{k2}\,x'_{ki}$ in Normalform, $A_i\,A'_i$ die Divisoren, welche die Normalform aus der Determinantenform herstellen, so liefern die Formeln i):

$$T_3 \equiv \frac{\alpha_1}{A_1 A_3} T_1 + \frac{\alpha_2}{A_2 A_3} T_2 = 0$$

$$T_3' \equiv \frac{\beta_1}{A_1' A_3'} T_1' + \frac{\beta_2}{A_2' A_3'} T_2' = 0$$

$$T \equiv \frac{\lambda_1 \alpha_1}{A_1 A_3} T_1 + \frac{\lambda_2 \alpha_2}{A_2 A_3} T_2 = 0$$

$$T' \equiv \frac{\lambda_1 \beta_1}{A_1' A_3'} T_1' + \frac{\lambda_2 \beta_2}{A_2' A_3'} T_2' = 0,$$

in Uebereinstimmung mit Nr. 24.

27. Zwei collineare Strahlenbüschel werden von zwei Geraden in collinearen Punktreihen durchschnitten; es entsprechen sich die auf entsprechenden Strahlen gelegenen Punkte.

Man denke sich die beiden Büschel in derselben Ebene. Sind $u_{k1}\, u'_{k2}$, $u_{k1}\, u'_{k2}$ die Coordinaten von zwei Paar entsprechenden Strahlen, $u_{k3}\, u'_{k3}$ die eines dritten Paares

$$u_{k3} = a_1\, u_{k1} + a_2\, u_{k2}$$
$$u'_{k3} = b_1\, u'_{k1} + b_2\, u'_{k2},$$

sind ferner $\mathfrak{u}_k$ und $\mathfrak{u}'_k$ die Coordinaten der durchdringenden Geraden, so haben die Durchschnittspunkte je zweier entsprechenden Strahlen die Gleichungen:

$$\text{k)}\quad \begin{aligned} P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 \\ l_1 a_1 u_{11} + l_2 a_2 u_{12}, & l_1 a_1 u_{21} + l_2 a_2 u_{22}, & l_1 a_1 u_{31} + l_2 a_2 u_{32} \end{vmatrix} = 0 \\ P' \equiv \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ \mathfrak{u}_1' & \mathfrak{u}_2' & \mathfrak{u}_3' \\ l_1 b_1 u'_{11} + l_2 b_2 u'_{12}, & l_1 b_1 u'_{21} + l_2 b_2 u'_{22}, & l_1 b_1 u'_{31} + l_2 b_2 u'_{32} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich ebenso wie die in Nr. 25 mit den Formeln von Nr. 24 in Uebereinstimmung bringen.

28. Zwei collineare Ebenenbüschel werden von zwei Geraden in collinearen Punktreihen geschnitten; die Schnittpunkte entsprechender Ebenen sind entsprechende Punkte.

Sind $u_{k1}\, u'_{k1}$, $u_{k2}\, u'_{k2}$, $u_{k3}\, u'_{k3}$ die Coordinaten von drei Paar entsprechenden Ebenen und

$$u_{k3} = a_1\, u_{k1} + a_2\, u_{k2}$$
$$u'_{k3} = b_1\, u'_{k1} + b_2\, u'_{k2},$$

sind ferner $\mathfrak{u}_{k1}\, \mathfrak{u}_{k2}$ zwei Ebenen, welche sich in der einen, $\mathfrak{u}'_{k1}\, \mathfrak{u}'_{k2}$ zwei Ebenen, welche sich in der andern Durchdringungsgeraden schneiden, so sind die Gleichungen für die Durchschnittspunkte zweier entsprechenden Ebenen:

$$
1)\quad
\begin{aligned}
P &\equiv \begin{vmatrix}
u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\
u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\
l_1 a_1 u_{11} + l_2 a_2 u_{12}, & l_1 a_1 u_{21} + l_2 a_2 u_{22}, & l_1 a_1 u_{31} + l_2 a_2 u_{32}, & l_1 a_1 u_{41} + l_2 a_2 u_{42}
\end{vmatrix} \\
P' &\equiv \begin{vmatrix}
u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\
u_{11}' & u_{21}' & u_{31}' & u_{41}' \\
u_{12}' & u_{22}' & u_{32}' & u_{42}' \\
l_1 b_1 u_{11} + l_2 b_2 u_{12}, & l_1 b_1 u_{21} + l_2 b_2 u_{22}, & l_1 b_1 u_{31} + l_2 b_2 u_{32}, & l_1 b_1 u_{41} + l_2 b_2 u_{42}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen werden ganz so wie die in Nr. 26 auf die Formen von Nr. 24 gebracht.

29. Zwei collineare Ebenenbüschel werden von zwei Ebenen in collinearen Strahlenbüscheln geschnitten. Es entsprechen sich die Schnitte entsprechender Ebenen.

Zwei collineare Strahlenbüschel werden von zwei durch je ein Centrum gelegten Axen aus von collinearen Ebenenbüscheln projicirt. Es entsprechen sich die Projicirenden entsprechender Strahlen.

Um beide Sätze zu beweisen, lege man durch die beiden Strahlenbüschel je eine Gerade; diese beiden werden von den entsprechenden Ebenen der Büschel des ersten und den entsprechenden Strahlen der Büschel des zweiten Satzes in collinearen Punktreihen geschnitten, und mithin sind die Strahlenbüschel des ersten und die Ebenenbüschel des zweiten Satzes collinear, denn sie projiciren collineare Punktreihen.

30. Wenn zwei collineare Gerade sich in einem selbst entsprechenden Punkte schneiden, so liegen sie perspectivisch, d. h. die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte gehen durch einen Punkt.

Im Schnittpunkte mögen sich die entsprechenden Punkte $P_1 P_1'$ decken; man verbinde irgend zwei Paar entsprechende Punkte $P_2 P_2'$ und $P_3 P_3'$. Vom Schnittpunkte beider Geraden $P_2 P_2'$ und $P_3 P_3'$ projicire man beide Büschel. Dadurch erhält man zwei concentrische collineare Büschel, welche drei Doppelstrahlen haben, nämlich die nach den Punkten $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$; mithin sind die beiden Büschel identisch, und es fällt demnach der Projectionsstrahl irgend eines Punktes P mit dem des entsprechenden P' zusammen, q. e. d.

31. Wenn drei (nicht in derselben Ebene enthaltene) collineare Gerade sich in einem selbst entsprechenden Punkte schneiden, so liegen die drei Geraden perspec-

tivisch; d. i. die Ebenen durch je drei entsprechende Punkte bilden ein Büschel.

Im Schnittpunkte seien die entsprechenden Punkte $P_1 P_1' P_1''$ vereint. Man lege die Ebenen durch die entsprechenden Punkte $P_2 P_2' P_2''$, sowie durch $P_3 P_3' P_3''$. Von der Schnittlinie dieser Ebenen aus projicire man die drei Punktreihen. Dadurch erhält man drei coaxiale Ebenenbüschel, welche drei Doppelebenen haben, nämlich die Ebenen nach dem Punkte $P_1 P_1' P_1''$, sowie die nach den Punkten $P_2 P_2' P_2''$ und $P_3 P_3' P_3''$.

32. Ebenso beweist man die folgenden Sätze:

Wenn die Verbindungsgerade der Centra zweier collinearen Büschel sich selbst entspricht, so liegen die Büschel perspectivisch, d. h. die Punkte, in welchen sich je zwei entsprechende Strahlen schneiden, bilden eine Gerade.

Wenn die Axen zweier collinearen Ebenenbüschel in derselben Ebene liegen und diese Ebene sich selbst entspricht, so liegen die Durchschnittsgeraden je zweier entsprechenden Ebenen auf einer Ebene.

Wenn die Axen dreier collinearen Ebenenbüschel in derselben Ebene liegen und diese Ebene sich selbst entspricht, so liegen die Durchschnittspunkte je dreier entsprechenden Ebenen in einer Geraden.

33. Die entsprechenden Strahlen zweier collinearen in derselben Ebene enthaltenen Büschel schneiden sich im Allgemeinen (wenn sie nicht perspectivisch liegen) in den Punkten eines Kegelschnitts, der durch die beiden Büschelcentra geht.

Denn in irgend einer Geraden sind höchstens zwei Punkte der fraglichen Curve enthalten.

Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier collinearen Geraden umhüllen im Allgemeinen (wenn die Geraden nicht perspectivisch liegen) einen Kegelschnitt, der die beiden Geraden berührt.

Denn durch irgend einen Punkt der Ebene gehen höchstens zwei Umhüllende der Curve.

34. Man beweist leicht apogogisch die Umkehrungen dieser Sätze:

Die Punkte eines Kegelschnittes werden von je zwei Punkten des Kegelschnittes aus durch collineare Büschel projicirt.

Die Tangenten eines Kegelschnittes durchdringen

je zwei Tangenten des Kegelschnitts in collinearen Punktreihen.

Von den Sätzen 32) und 33) ausgehend und mit Benutzung der vorangehenden Collineationssätze gelangt man durch vorwiegend geometrische Schlüsse zu einer umfassenden und überaus reichhaltigen Betrachtung der Curven zweiter Ordnung. Man vergleiche hierüber z. B. die synthetisch-geometrischen Werke von Steiner und Reye.

35. Die entsprechenden Ebenen zweier collinearen Büschel, deren Axen sich nicht treffen, schneiden sich in Punkten eines einschaligen Hyperboloids. Die sämmtlichen Schnittgeraden bilden das eine System von nichtschneidenden Geraden, die beiden Büschelaxen gehören zu dem andern System.

Sind die Polynome der Gleichungen von drei Paar entsprechenden Ebenen in Normalform $T_1\,T_1'$, $T_2\,T_2'$, $T_3\,T_3'$, und ist

$$T_3 \equiv \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 = 0,$$
$$T_3' \equiv \beta_1 T_1' + \beta_2 T_2' = 0,$$

so erfüllen die gemeinsamen Punkte je zweier entsprechenden Ebenen folgende Gleichung eines einschaligen Hyperboloids:

m) $$\alpha_1 \beta_2 T_1 T_2' - \alpha_2 \beta_1 T_2 T_1' = 0.$$

Denn diese Gleichung wird erfüllt durch die Punkte, für welche zugleich

$$T_1 = 0 \text{ und } T_1' = 0,$$

oder: $$T_2' = 0 \text{ und } T_2' = 0,$$

oder:

$$T_3 \equiv \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 = 0 \text{ und } T_3' \equiv \beta_1 T_1' + \beta_2 T_2' = 0,$$

oder:

$$T \equiv \lambda_1 \alpha_1 T_1 + \lambda_2 \alpha_2 T_2 = 0 \text{ und } T' \equiv \lambda_1 \beta_1 T_1' + \lambda_2 \beta_2 T_2' = 0.$$

Aus den letzten beiden Zeilen folgt nämlich für die Punkte, welche $T_3 = 0$ und $T_3' = 0$ erfüllen:

$$T_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} T_2, \quad T_1' = -\frac{\beta_2}{\beta_1} T_2';$$

für die Punkte, welche $T = 0$ und $T' = 0$ erfüllen:

$$T_1 = -\frac{\lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1 \alpha_1} T_2, \quad T_1' = -\frac{\lambda_2 \beta_2}{\lambda_1 \beta_1} T_2'.$$

Setzt man diese Werthe in m) ein, so wird in der That diese Gleichung identisch erfüllt.

36. Die Ebenen, welche die entsprechenden Punkte zweier sich kreuzenden collinearen Punktreihen verbinden,

umhüllen ein einschaliges Hyperboloid. Diese Ebenen bilden unzählige Büschel, deren Axen die Verbindungsgeraden von je zwei entsprechenden Punkten der collinearen Geraden sind. Die Axen dieser Büschel bilden das eine System von nichtschneidenden Geraden des Hyperboloids, die beiden collinearen Geraden gehören zu dem andern System.

Denn sind $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$ die linken Seiten der Gleichungen von drei Paar entsprechenden Punkten in Normalform, und ist

$$P_3 \equiv \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = 0,$$
$$P_3' \equiv \beta_1 P_1' + \beta_2 P_2' = 0,$$

so erfüllen die gemeinsamen Ebenen von je zwei entsprechenden Punkten der beiden Geraden die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids in Plancoordinaten:

n) $$\alpha_1 \beta_2 P_1 P_2' - \alpha_2 \beta_1 P_2 P_1' = 0.$$

Denn diese Gleichung wird von allen Ebenen erfüllt, für welche zugleich

$$P_1 = 0 \text{ und } P_1' = 0;$$

oder: $$P_2 = 0 \text{ und } P_2' = 0;$$

oder:

$$P_3 \equiv \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = 0 \text{ und } P_3' \equiv \beta_1 P_1' + \beta_2 P_2' = 0;$$

oder:

$$P \equiv \lambda_1 \alpha_1 P_1 + \lambda_2 \alpha_2 P_2 = 0 \text{ und } P' \equiv \lambda_1 \beta_1 P_1' + \lambda_2 \beta_2 P_2' = 0;$$

wovon man sich wie oben überzeugt.

37. Die Geraden des einen Systems eines einschaligen Hyperboloids werden von je zwei Geraden des andern Systems aus durch collineare Ebenenbüschel projicirt.

Die Geraden des einen Systems eines einschaligen Hyperboloids schneiden je zwei Gerade des andern Systems in collinearen Punktreihen.

Denn seien $G_1\, G_2\, G_3$ drei Gerade des einen Systems; $H_1\, H_2$ zwei des andern, welche folglich beide die drei G schneiden; seien ferner $T_1\, T_2\, T_3$ die Ebenen, welche die Geraden $G_1\, G_2\, G_3$ von H_1 aus projiciren, $T_1'\, T_2'\, T_3'$, die Ebenen, welche $G_1'\, G_2'\, G_3'$ von H_2 aus projiciren. Je zwei entsprechende Ebenen der beiden collinearen Büschel, welche die Axen H_1 und H_2 haben, und in denen $T_1\, T_1'$, $T_2\, T_2'$, $T_3\, T_3'$ drei Paar entsprechender Ebenen sind, schneiden sich in Geraden eines Hyperboloids, welches die fünf Geraden $G_1\, G_2\, G_3\, H_1\, H_2$ enthält, und zwar in dem System, zu welchem $G_1\, G_2\, G_3$ gehören. Dieses Hyperboloid ist mit dem gegebenen identisch, denn es hat mit ihm die fünf Geraden $G_1 \ldots H_2$ gemein.

Seien zum Beweise des zweiten Theiles $P_1\, P_2\, P_3$ bez. $P_1'\, P_2'\, P_3'$ die Punkte, in welchen die Geraden $G_1\, G_2\, G_3$ von der Geraden H_1 bez. von H_2 geschnitten werden. Die Verbindungsgerade je zweier entsprechenden Punkte der beiden auf H_1 und H_2 gelegenen collinearen Punktreihen, in denen $P_1\, P_1'$, $P_2\, P_2'$, $P_3\, P_3'$ sich entsprechen, bilden das eine System eines Hyperboloids, auf welchem $G_1\, G_2\, G_3$ $H_1\, H_2$ liegen, und zwar dasjenige, zu welchem auch $G_1\, G_2\, G_3$ gehören. Dieses Hyperboloid ist mit dem gegebenen identisch.

Collineation von Ebenen und Ebenenbündeln.

§. 1.

Grundformeln der Collineation von Ebenen.

1. Man denke sich in zwei verschiedenen oder zusammenfallenden Ebenen je ein orthogonales Coordinatensystem und die Punkte jeder Ebene durch ihre Descartes'schen Coordinaten bestimmt. Alsdann ist die allgemeinste analytisch-geometrische Form, durch welche ein und nur ein Punkt der einen Ebene mit einem Punkte der andern eindeutig verknüpft wird, durch die Gleichungen gegeben:

$$1)\quad \begin{aligned} axx' + bxy' + cx + dyx' + eyy' + fy + gx' + hy' + i = 0 \\ a_1xx' + b_1xy' + c_1x + d_1yx' + e_1yy' + f_1y + g_1x' + h_1y' + i_1 = 0 \end{aligned}$$

Hierin sind $a \ldots . a_1 \ldots .$ die Verwandtschaft charakterisirende Constante; $x y$ die Coordinaten eines Punktes des einen, $x' y'$ die Coordinaten des entsprechenden (verwandten, homologen, zugeordneten) Punktes der andern Ebene.

Zwei derart verwandte ebene Punktsysteme heissen einundeindeutig verwandt.

2. Sind die Constanten im Besonderen so beschaffen, dass jeder geradlinigen Punktreihe der einen Ebene eine geradlinige Punktreihe in der andern entspricht, so müssen die Lösungen der Gleichungen (1) nach $x y$ oder nach $x' y'$ in lineare Gleichungen von $x y$ bez. $x' y'$ eingesetzt, wiederum lineare Gleichungen nach $x' y'$ bez. $x y$ geben (d. i. die Gleichungen derjenigen Geraden, welche der durch die lineare Gleichung gegebenen Geraden entspricht).

Die Lösungen nach $x y$ erscheinen unter der Form

$$x = \frac{v}{u}, \quad y = \frac{w}{u},$$

worin $u\, v\, w$ Functionen von $x' y'$ bedeuten.

Sei

$$mx + ny - 1 = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden der xy Ebene; den Punkten derselben entsprechen diejenigen Punkte der $x'y'$ Ebene, welche die Gleichung

$$m\frac{v}{u} + n\frac{w}{u} - 1 = 0$$

erfüllen. Diese Gleichung ist dann und nur dann unabhängig von m und n linear, wenn die drei Functionen $u\,v\,w$ linear sind.

Damit den Geraden der xy Ebene Gerade in der $x'y'$ Ebene entsprechen, müssen also die Verwandtschaftsgleichungen auf die Form reducirbar sein:

$$(ax' + by' + c)\,x - (dx' + ey' + f) = 0,$$
$$(ax' + by' + c)\,y - (gx' + hy' + i) = 0.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach $x'y'$, so erhält man:

$$(ax + d)x' + (bx + e)y' + cx + f = 0,$$
$$(ay + g)x' + (by + h)y' + cy + i = 0.$$

Löst man diese Gleichungen nach $x'y'$, so erhält man Lösungen von der Form:

$$x' = \frac{s}{r},\quad y' = \frac{t}{r},$$

worin $r\,s\,t$ lineare Functionen von $x\,y$ sind.

Es entsprechen demnach in diesem Falle den Geraden der $x'y'$ Ebene auch Gerade in der xy Ebene; das Entsprechen geradliniger Punktreihen ist also wechselseitig.

Zwei einundeindeutig verwandte Systeme, in welchen sich geradlinige Punktreihen wechselseitig entsprechen, heissen collinear-verwandt.

Die beiden Collineationsgleichungen enthalten acht unabhängige Constante. Durch jedes Paar gegebener entsprechender Punkte werden zwei Bedingungsgleichungen für die Constanten geliefert.

Die allgemeine Collineation ist demnach durch vier Paar entsprechender Punkte hinreichend und nothwendig bestimmt.

3. Wenn man nun durch irgend eine andere analytisch-geometrische Methode die Punkte zweier Ebenen so mit einander verknüpft, dass jedem Punkte einer Ebene ein und nur ein Punkt der andern entspricht, dass geradlinige Punktreihen sich wechselseitig entsprechen und dass die Verknüpfung durch vier Paar entsprechender Punkte ausreichend und nothwendig bestimmt ist, so wird

durch diese Methode der allgemeine Fall der Collineation dargestellt. Denn man gehe durch geeignete Transformationsformeln von jener analytisch-geometrischen Methode zu Gleichungen zwischen orthogonalen Coordinaten über und löse dieselben nach x und y; nimmt man nun an, diese Gleichungen hätten die für Collineation charakteristische Form nicht, so könnte kein wechselseitiges Entsprechen von Geraden stattfinden; dies widerspricht der Voraussetzung. Nimmt man an, es werde nur ein specieller Fall der Collineation durch jene Methode dargestellt, so müssten in den durch Transformation erhaltenen Collineationsgleichungen zwischen acht Constanten gewisse, für den angenommenen Specialfall der Collineation nothwendige Bedingungsgleichungen bestehen; dann wäre aber diese specielle Collineationsart durch weniger als vier gegebene entsprechende Punktpaare bestimmt; dies widerspricht dem letzten Theile der Voraussetzung.

4. Bestimmung der Coordinaten collinear-verwandter Punktpaare aus den Coordinaten von vier gegebenen entsprechenden Punktpaaren. Bestimmung der Gleichungen collinear verwandter Punktpaare aus den Gleichungen von vier gegebenen entsprechenden Punktpaaren.

Wir denken uns die beiden Ebenen, deren Punkte in collinearer Verwandtschaft stehen, zusammenfallend, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt ist.

Seien $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ vier beliebige Punkte der einen Ebene, $P_1'\,P_2'\,P_3'\,P_4'$ die entsprechenden vier Punkte der andern Ebene; diejenige Coordinate von P_k, welche senkrecht auf g_i steht, werde durch x_{ik} bezeichnet, so dass also P_k die Coordinaten hat:

$$x_{1k},\quad x_{2k},\quad x_{3k},\quad x_{4k}.$$

Die Coordinaten der entsprechenden Punkte werden mit denselben unteren Indices geschrieben und durch einen oben angebrachten Strich unterschieden, so dass die Coordinaten von P_k' sind:

$$x_{1k}',\quad x_{2k}',\quad x_{3k}',\quad x_{4k}'.$$

Weder von den vier Punkten P_i, noch von denen P_i' sollen drei auf derselben Geraden liegen.

Alsdann giebt es immer sechs von Null verschiedene endliche reelle Zahlen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$, die so beschaffen sind, dass für $i = 1, 2, 3$ die Gleichungen erfüllt werden:

$$\text{a)}\qquad x_{i4} = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \alpha_3 x_{i3}.$$

$$\text{b)}\qquad x_{i4}' = \beta_1 x_{i1}' + \beta_2 x_{i2}' + \beta_3 x_{i3}',$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1.$$

Bestimmt man nun durch drei willkürlich gewählte reelle Zahlen λ_1 λ_2 λ_3 die Coordinaten x_i und x'_i zweier Punkte P und P' nach den sechs Formeln:

$$\text{c)} \qquad x_i = \frac{\lambda_1 \alpha_1 x_{i1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{i2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{i3}}{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3},$$

$$\text{d)} \qquad x'_i = \frac{\lambda_1 \beta_1 x_{i1} + \lambda_2 \beta_2 x_{i2} + \lambda_3 \beta_3 x_{i3}}{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3},$$

so sind die Punkte der beiden Ebenen collinear verwandt und zwar sind P und P' entsprechende Punkte.

Denn einem Punkte P gehört ein und nur ein Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ zu, durch welches seine Coordinaten nach den Formeln c) abgeleitet werden können, und durch dieses Verhältniss ist der entsprechende Punkt P' eindeutig bestimmt; dasselbe gilt, wenn man von P' ausgeht. Demnach ist das Entsprechen wechselseitig eindeutig.

Liegt ferner P auf der Geraden $P_4 P_5$, so ist

$$x_i = m\, x_{i4} + n\, x_{i5}.$$
$$m + n = 1,$$

Bezeichnet man die drei auf den Punkt P_k bezüglichen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ mit dem zweiten Index k, so dass also

$$x_{ik} = \frac{\lambda_{1k} \alpha_1 x_{i1} + \lambda_{2k} \alpha_2 x_{i2} + \lambda_{3k} \alpha_3 x_{i3}}{\lambda_{1k} \alpha_1 + \lambda_{2k} \alpha_2 + \lambda_{3k} \alpha_3},$$

so folgt, wenn

$$\lambda_{1k} \alpha_1 + \lambda_{2k} \alpha_2 + \lambda_{3k} \alpha_3 = \sigma_k,$$

für die Coordinaten von P:

$$\text{e)} \qquad x_i = \Sigma^h \left(\frac{m \lambda_{h4}}{\sigma_4} + \frac{n \lambda_{h5}}{\sigma_5} \right) \alpha_h x_{ih}, \quad h = 1, 2, 3.$$

Die Coordinaten des entsprechenden Punktes P' sind demnach:

$$\text{f)} \qquad x'_i = \Sigma^h \left(\frac{m \lambda_{h4}}{\sigma_4} + \frac{n \lambda_{h5}}{\sigma_5} \right) \beta_h x'_{ih} : \left(m \frac{\tau_4}{\sigma_4} + n \frac{\tau_5}{\sigma_5} \right),$$

wenn man abkürzend setzt:

$$\lambda_{1k} \beta_1 + \lambda_{2k} \beta_2 + \lambda_{3k} \beta_3 = \tau_k.$$

Die Formeln f) lassen sich auf die Form bringen:

$$\text{g)} \qquad x'_i = \frac{\lambda_{14} \beta_1 x'_{i1} + \lambda_{24} \beta_2 x'_{i2} + \lambda_{34} \beta_3 x'_{i3}}{\tau_4} \cdot \frac{m \sigma_5 \tau_4}{m \tau_5 \sigma_4 + n \tau_4 \sigma_5}$$
$$+ \frac{\lambda_{15} \beta_1 x'_{i1} + \lambda_{25} \beta_2 x'_{i2} + \lambda_{35} \beta_3 x'_{i3}}{\tau_5} \cdot \frac{n \sigma_4 \tau_5}{m \tau_5 \sigma_4 + n \tau_4 \sigma_5}.$$

Dieser Punkt gehört hiernach der Linie $P_4' P_5'$ an, denn die Ableitungsformeln g) haben die Form:

$$x_i' = p x_{i4}' + q x_{i5}' \quad , \quad p + q = 1.$$

Derselbe Beweisgang lehrt, dass einem Punkte P' einer Geraden $P_4' P_5'$ ein Punkt P der Geraden $P_4 P_5$ entspricht. Es findet demnach ein wechselseitiges Entsprechen von Geraden statt.

Setzt man ferner der Reihe nach

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_1 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,$$

so ergeben sich P_3 und P_3', P_1 und P_1', P_2 und P_2', P_4 und P_4' als entsprechende Punktpaare.

Demnach wird durch die Formeln c) und d) der allgemeine Fall der Collineation dargestellt. —

Die Gleichung eines Punktes P_k in Normalform ist:

$$P_k \equiv \frac{x_{1k}}{h_1} u_1 + \frac{x_{2k}}{h_2} u_2 + \frac{x_{3k}}{h_3} u_3 = 0.$$

Führt man hierein die Formeln c) und d) ein, und bezeichnet man abkürzend die linken Seiten in den Normalgleichungen der Punkte P_k P_k' bez. mit (P_k) und (P_k'), so findet man die Gleichungen zweier entsprechenden Punkte

h) $\quad (P) \equiv [\lambda_1 \alpha_1 (P_1) + \lambda_2 \alpha_2 (P_2) + \lambda_3 \alpha_3 (P_3)] : \sigma,$

i) $\quad (P') \equiv [\lambda_1 \beta_1 (P_1') + \lambda_2 \beta_2 (P_2') + \lambda_3 \beta_3 (P_3')] : \tau.$

4. Geradenebenen. Als „Geradenebenen“ bezeichnet man Ebenen dann, wenn man sie als Träger aller in sie fallenden Geraden ansieht.

Bezieht man die Geraden zweier Ebenen (kürzer „zwei Geradenebenen“) so auf einander, dass jeder Geraden der einen Ebene eine und nur eine der andern entspricht, so heissen die beiden Geradenebenen einundeindeutig verwandt. Um diese Verwandtschaft analytisch auszudrücken, hat man die Geraden beider Ebenen durch eindeutige Coordinaten zu bestimmen und die Coordinaten zweier entsprechender Geraden durch zwei für beide Coordinatenpaare lineare Gleichungen zu verknüpfen.

5. Seien $u\, v$, $u'\, v'$ die orthogonalen Coordinaten zweier entsprechenden Geraden (im Allgemeinen auf verschiedene Systeme bezogen) und seien

$$u' = \frac{\varphi}{\psi} \quad , \quad v' = \frac{\chi}{\psi}$$

die Lösungen der Verwandtschaftsgleichungen nach $u'\, v'$, so müssen,

als die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass einem jeden Büschel der einen Ebene ein Büschel der andern entspricht, die drei Functionen ψ, φ, χ vom ersten Grade sein.

Für diese specielle einundeindeutige Verwandtschaft, „die Collineation von Geradenebenen," ist demnach ausreichend und nothwendig, dass man die Verwandtschaftsgleichungen auf die Form bringen kann:

$$\text{k)} \quad (au + bv + c)u' + \partial u + ev + f = 0,$$
$$\text{l)} \quad (au + bv + c)v' + gu + hv + i = 0.$$

Die Gleichungen enthalten acht unabhängige Constante; diese werden durch vier gegebene Paare entsprechender Geraden, von denen nicht drei denselben Punkt enthalten, eindeutig bestimmt.

6. Jede andere analytisch-geometrische Methode, durch welche die Geraden zweier Ebenen so mit einander einundeingliedrig verknüpft werden, dass ein wechselseitiges Entsprechen von Büscheln stattfindet und vier Paare entsprechender Geraden beliebig angenommen werden können, stellt demnach den allgemeinen Fall der Collineation von Geradenebenen her.

Man denke sich zwei Ebenen zusammenfallend und die Geraden derselben auf dasselbe Coordinatendreieck bezogen.

Seien $T_1\, T_2\, T_3\, T_4$ vier willkürliche Geraden der einen Ebene, $T_1'\, T_2'\, T_3'\, T_4'$ vier Geraden der zweiten Ebene, so dass von den Geraden T_i und T_i' nicht drei denselben Punkt enthalten; dann lassen sich die Coordinaten u_{k4} von T_4 und u'_{k4} von T_4' aus den Coordinaten der übrigen Geraden nach den sechs Formeln berechnen:

$$u_{k4} = a_1 u_{k1} + a_2 u_{k2} + a_3 u_{k3},$$
$$u'_{k4} = b_1 u_{k1} + b_2 u_{k2} + b_3 u_{k3},$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \qquad b_1 + b_2 + b_3 = 1,$$

wobei sämmtliche sechs Coefficienten a und b von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

Man leite ferner die Coordinaten zweier Geraden TT' mit Hülfe der reellen Zahlen $l_1\, l_2\, l_3$ nach den Formeln ab:

$$\text{m)} \quad u_k = (l_1 a_1 u_{k1} + l_2 a_2 u_{k2} + l_3 a_3 u_{k3}) : s,$$
$$\text{n)} \quad u'_k = (l_1 b_1 u'_{k1} + l_2 b_2 u_{k2} + l_3 b_3 u_{k3}) : t,$$

wo

$$s = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3,$$
$$t = l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3.$$

Alsdann sind die beiden Geradenebenen collinear

verwandt und zwar sind die mit derselben Coefficientengruppe l bestimmten Geraden T und T' entsprechende Geraden.

Denn jeder Geraden T gehört ein und nur ein Verhältniss der Coefficienten

$$l_1 : l_2 : l_3$$

zu, und durch dies Verhältniss ist T eindeutig bestimmt, und umgekehrt.

Die Büschel beider Ebenen entsprechen sich wechselseitig.

Denn sind $T_4 T_5 T_6$ und $T_4' T_5' T_6'$ sechs paarweis entsprechende Gerade, und erscheinen die Coordinaten u_{k6} von T_6 unter der Form:

$$u_{k6} = m u_{k4} + n u_{k5},$$

so lassen sich die Coordinaten u'_{k6} auf die Form bringen:

$$u_{k6} = m' u_{k4} + n' u'_{k5},$$

wobei $m' n'$ aus m, n, l_{i4}, l_{i5}, a_i, b_i in gewisser Weise zusammengesetzte Coefficienten sind, und umgekehrt.

Ferner entsprechen sich die vier Paar willkürliche Gerade

$$T_1 \text{ und } T_1', \; T_2 \text{ und } T_2', \; T_3 \text{ und } T_3', \; T_4 \text{ und } T_4'.$$

Also liefert die soeben erörterte Methode den allgemeinen Fall der Collineation von Geradenebenen. —

Sind (T_i) (T_i') die Gleichungen der Geraden in der zweiten Normalform, so ist

$$(T) \equiv \Sigma \frac{u_k}{h_k} x_k = 0, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$(T') \equiv \Sigma \frac{u_k'}{h_k} x_k = 0.$$

Führt man für $u_k u_k'$ die Werthe m) und n) ein, so entsteht:

$$(T) \equiv \left(l_1 a_1 \, \Sigma \frac{u_{k1}}{h_k} x_k + l_2 a_2 \Sigma \frac{u_{k2}}{h_k} x_k + l_3 a_3 \Sigma \frac{u_{k3}}{h_k} x_k \right) : s,$$

und ähnlich für T'; hieraus folgt:

o) $(T) \equiv [l_1 a_1 (T_1) + l_2 a_2 (T_2) + l_3 a_3 (T_3)] : s,$

p) $(T') \equiv [l_1 b_1 (T_1) + l_2 b_2 (T_2) + l_3 b_3 (T_3)] : t.$ —

7. Gleichung entsprechender Geraden in collinearen Punktebenen.

Die Gleichung der Geraden $P_4 P_5$ in erweiterter Form ist:

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \Sigma \lambda_{i4} \alpha_i x_{1i}, & \Sigma \lambda_{i4} \alpha_i x_{2i}, & \Sigma \lambda_{i4} \alpha_i x_{3i} \\ \Sigma \lambda_{i5} \alpha_i x_{1i}, & \Sigma \lambda_{i5} \alpha_i x_{2i}, & \Sigma \lambda_{i5} \alpha_i x_{3i} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante zerfällt in eine Summe von neun Gliedern von der allgemeinen Form

$$\alpha_m \alpha_n \lambda_{m4} \lambda_{n5} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} \end{vmatrix} (\equiv R_{mn}),$$

worin für m wie für n jede der Ziffern 1, 2, 3 gesetzt werden kann.

Von diesen Determinanten verschwinden die drei, in welchen $m = n$; die übrigen sechs Glieder lassen sich in folgender Weise zu drei Paaren ordnen:

$$R_{12} + R_{21} + R_{23} + R_{32} + R_{31} + R_{13}.$$

Das erste Paar, das zweite und dritte Paar enthalten entgegengesetzt gleiche Determinanten; also ergiebt sich T in der Form

$$\text{q)} \quad T \equiv \Sigma (\lambda_{m4} \lambda_{n5} - \lambda_{m4} \lambda_{n5}) \alpha_m \alpha_n \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} \end{vmatrix},$$

worin für m der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 und n die jedesmal nächstfolgende des Cyklus zu setzen ist.

Bezeichnet (T_i) die linke Seite der Gleichung von $P_{i+1} P_{i+2}$ in zweiter Normalform (wobei i, $i + 1$, $i + 2$ ein Cyklus von 1, 2, 3), so ist bekanntlich

$$(T_i) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{1,i+1} & x_{2,i+1} & x_{3,i+1} \\ x_{1,i+2} & x_{2,i+2} & x_{3,i+2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ x_{1,i+1} & x_{2,i+1} & x_{3,i+1} \\ x_{1,i+2} & x_{2,i+2} & x_{3,i+2} \end{vmatrix}.$$

Ferner ist, wenn $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ die drei auf den gleichbezifferten Geraden gelegenen Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ bedeuten, und ϱ_v die Abstände des Fixpunktes von den gleichbezifferten Dreiecksseiten sind:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ x_{1,i+1} & x_{2,i+1} & x_{3,i+1} \\ x_{1,i+2} & x_{2,i+2} & x_{3,i+2} \end{vmatrix} = \frac{h_1 h_2 h_3}{\Delta} \cdot \gamma_i \varrho_i.$$

Setzt man nun abkürzend:

$$\alpha) \quad \begin{aligned} \Sigma(\lambda_{m4} \lambda_{n5} - \lambda_{n4} \lambda_{m5}) \alpha_m \alpha_n \gamma_p \varrho_p &= s, \\ \lambda_{m4} \lambda_{n5} - \lambda_{n4} \lambda_{m5} &= l_p, \\ \alpha_m \alpha_n \gamma_p \varrho_p &= a_p, \end{aligned}$$

worin für mnp der Reihe nach die drei Cyklen von 1, 2, 3 gesetzt werden mögen, so ergiebt sich die Gleichung von T in zweiter Normalform zu:

r) $$(T) \equiv [l_1 a_1 (T_1) + l_2 a_2 (T_2) + l_3 a_3 (T_3)] : s.$$

Ersetzt man in dieser Rechnung

β) $$\begin{array}{ccccccccl} P & T & x & \alpha & \gamma & \varrho & s & a & \text{durch} \\ P' & T' & x' & \beta & \gamma' & \varrho' & t & b, & \end{array}$$

so erhält man

s) $$(T') \equiv [l_1 b_1 (T_1') + l_2 b_2 (T_2') + l_3 b_3 (T_3')] : t. \text{ —}$$

Gleichung zweier entsprechenden Punkte (Centra entsprechender Büschel) in collinearen Geradenebenen.

In derselben Weise, wie in der vorigen Analyse, ergiebt sich: Sind $T_4 T_4'$, $T_5 T_5'$ zwei Paar entsprechender Geraden, so sind die Gleichungen der beiden Büschelcentra $T_4 T_5$ bez. $T_4' T_5'$ in erweiterter Form:

t) $$P \equiv \Sigma (l_{m4} l_{n5} - l_{m5} l_{n4}) a_m a_n \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_{1m} & u_{2m} & u_{3m} \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} \end{vmatrix},$$

u) $$P' \equiv \Sigma (l_{m4} l_{n5} - l_{m5} l_{n4}) b_m b_n \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_{1m}' & u_{2m}' & u_{3m}' \\ u_{1n}' & u_{2n}' & u_{3n}' \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung des Punktes P_i, welcher den Geraden T_{i+1} und T_{i+2} gemeinsam ist, lautet in Normalform:

$$(P_i) \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_{1,i+1} & u_{2,i+1} & u_{3,i+1} \\ u_{1,i+2} & u_{2,i+2} & u_{3,i+2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} \cdot \frac{D}{\gamma_i \varrho_i},$$

wenn D die doppelte Fläche von $P_1 P_2 P_3$ bezeichnet.

Setzt man ferner

γ) $$\begin{gathered} (l_{m4} l_{n5} - l_{m4} l_{n4}) = \lambda_p, \\ a_m a_n \gamma_p \varrho_p = \alpha_p, \\ \Sigma \alpha_p \lambda_p = \sigma; \end{gathered}$$

und vertauscht man hierauf in den Formeln

δ) $$\begin{array}{cccccccccl} T & P & u & a & \alpha & \gamma & \varrho & D & \sigma & \text{mit} \\ T' & P' & u' & b & \beta & \gamma' & \varrho' & D' & \tau, & \end{array}$$

so erhält man die Normalgleichungen entsprechender Punkte in folgender Form:

v) $$(P) \equiv [\lambda_1 \alpha_1 (P_1) + \lambda_2 \alpha_2 (P_2) + \lambda_3 \alpha_3 (P_3)] : \sigma,$$

w) $(P') \equiv [\lambda_1 \beta_1 (P_1') + \lambda_2 \beta_2 (P_2') + \lambda_3 \alpha_3 (P_3')] : \tau.$

Die Formeln r) s) v) w) lehren, dass zwei collinear verwandte Punktebenen zugleich collineare Geradenebenen sind, und zwar sind die entsprechenden Punkte die Centra entsprechender Büschel; und die entsprechenden Geraden sind Träger entsprechender Punktreihen.

Wir haben demnach vier Methoden zur Darstellung der Collineation in homogenen Coordinaten:

1) Durch die Coordinaten entsprechender Punkte, nach den Gleichungen c) und d);

2) durch die Coordinaten entsprechender Geraden, nach den Gleichungen h) und i);

3) durch die Gleichungen entsprechender Punkte, nach den Formeln m) und n);

4) durch die Gleichungen entsprechender Geraden, nach Formeln o) und p).

Hierbei hängen die in 1) und 3) auftretenden Constanten mit den in 2) und 4) auftretenden durch die Gleichungen α) β) γ) δ) zusammen.

§. 2.

Sätze über collinear verwandte Ebenen.

1. Man berechne die Coordinaten dreier beliebigen Punkte $P_m P_n P_o$ und ihrer entsprechenden Punkte P' aus den Coordinaten von $P_1 P_2 P_3$, bez. $P_1' P_2' P_3'$ mit Hülfe der neun Coefficienten $\lambda_{km} \lambda_{kn} \lambda_{ko}$ nach §. 1 c) und d) und bilde die Dreiecksdeterminante $P_m P_n P_o$; dieselbe zerfällt in ein Product, nämlich:

$$D D(P_m P_n P_o) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sigma_m \sigma_n \sigma_o} \begin{vmatrix} \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \lambda_{3m} \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \lambda_{3n} \\ \lambda_{1o} & \lambda_{2o} & \lambda_{3o} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet F_{mno} den Inhalt von $P_m P_n P_o$, L_{mno} die Determinante der λ, D den Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, so ist folglich

a) $$F_{mno} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sigma_m \sigma_n \sigma_o} \cdot L_{mno} \cdot D.$$

Sei F'_{mno} der Inhalt des Dreiecks $P'_m P'_n P'_o$, D der Inhalt von $P_1' P_2' P_3'$, so findet sich auf demselben Wege:

b) $$F'_{mno} = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\tau_m \tau_n \tau_o} \cdot L_{mno} D'.$$

Hieraus folgt weiter

$$F_{abd} : F'_{abd} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{\tau_a \tau_b \tau_d}{\sigma_a \sigma_b \sigma_d} \cdot \frac{D}{D'},$$

$$F_{bcd} : F'_{bcd} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{\tau_b \tau_c \tau_d}{\sigma_b \sigma_c \sigma_d} \cdot \frac{D}{D'},$$

$$F_{abe} : F'_{abe} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{\tau_a \tau_b \tau_e}{\sigma_a \sigma_b \sigma_e} \cdot \frac{D}{D'},$$

$$F_{bce} : F'_{bce} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \alpha_3} \cdot \frac{\tau_b \tau_c \tau_e}{\sigma_b \sigma_e \sigma_e} \cdot \frac{D}{D'}.$$

Dies ergiebt:

$$\frac{F_{abd} : F'_{abd}}{F_{bcd} : F'_{bcd}} = \frac{F_{abe} : F'_{abe}}{F_{bce} : F'_{bce}},$$

oder in anderer Form:

c) $$\frac{F_{abd}}{F_{bcd}} : \frac{F_{abe}}{F_{bce}} = \frac{F'_{abd}}{F'_{bcd}} : \frac{F'_{abe}}{F'_{bce}}.$$

Versteht man unter „Doppelverhältniss von fünf Punkten $P_a P_b P_c P_d P_e$ einer Ebene“ das Verhältniss

$$\frac{P_a P_b P_d}{P_b P_c P_d} : \frac{P_a P_b P_e}{P_b P_c P_e},$$

so ergiebt sich hieraus der Satz:

Lehrsatz: Das Doppelverhältniss von fünf Punkten der einen Ebene ist gleich dem Doppelverhältniss der fünf entsprechenden Punkte der andern Ebene.

Dieser Satz lässt sich in folgender Weise umkehren: Wählt man in zwei Ebenen vier Paar entsprechende Punkte beliebig und bestimmt jedes andere Paar entsprechende Punkte $P_5 P_5'$ nach den beiden Gleichungen

a) $$\frac{P_1 P_2 P_5}{P_2 P_3 P_5} : \frac{P_1 P_2 P_4}{P_2 P_3 P_4} = \frac{P_1' P_2' P_5'}{P_2' P_3' P_5'} : \frac{P_1' P_2' P_4'}{P_2' P_3' P_4'},$$

$$\frac{P_2 P_3 P_5}{P_3 P_1 P_5} : \frac{P_2 P_3 P_4}{P_3 P_1 P_4} = \frac{P_2' P_3' P_5'}{P_3' P_1' P_5'} : \frac{P_2' P_3' P_4'}{P_3' P_1' P_4'},$$

so sind die beiden Ebenen collinear verwandt und $P_5 P_5'$ sind entsprechende Punkte.

Denn wählt man P_5 beliebig, so sind dadurch die linken Seiten der beiden Gleichungen gegeben. Der geometrische Ort für alle

Punkte P', welche der ersten Gleichung genügen, ist **eine** durch diese Gleichung eindeutig bestimmte, den Punkt P_2 enthaltende Gerade; und der Ort für die Punkte P', welche der zweiten Gleichung genügen, ist eine durch diese eindeutig bestimmte den Punkt P_3 enthaltende Gerade. P_5' ist als Schnittpunkt dieser beiden Geraden, mithin eindeutig bestimmt.

Ferner lässt sich beweisen, dass einem Punkte der Geraden $P_5 P_6$ ein Punkt der durch die entsprechenden Punkte $P_5' P_6'$ gelegten Geraden entspricht.

Es seien die Coordinaten eines Punktes P_7 der Geraden $P_5 P_6$ durch die Formeln bestimmt

$$x_{k7} = m x_{k5} + n x_{k6}, \quad m + n = 1,$$

so ist zu beweisen, dass die Coordinaten des entsprechenden Punktes P_7' aus den Coordinaten von P_5' und P_6' durch Gleichungen von der Form abgeleitet werden:

$$x'_{k7} = \mu x'_{k5} + \nu x'_{k6}, \quad \mu + \nu = 1.$$

Da

$$DD(P_a P_b P_7) = m DD(P_a P_b P_5) + n DD(P_a P_b P_6)$$
$$DD(P'_a P'_b P_7') = \mu DD(P'_a P'_b P_5') + \nu DD(P'_a P'_b P_6'),$$

so folgen für die Flächen dieser Dreiecke dieselben Beziehungen

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} F_{ab7} &= m F_{ab5} + n F_{ab6}, \\ F'_{ab7} &= \mu F'_{ab5} + \nu F'_{ab6}. \end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichung der Doppelverhältnisse

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} \frac{F_{127}}{F_{237}} : \frac{F_{124}}{F_{234}} &= \frac{F'_{127}}{F'_{237}} : \frac{F'_{124}}{F'_{234}}, \\ \frac{F_{237}}{F_{317}} : \frac{F_{234}}{F_{314}} &= \frac{F'_{237}}{F'_{317}} : \frac{F'_{234}}{F_{314}} \end{aligned}$$

die Werthe für F_{ab7} und F'_{ab7} aus b) ein, und bestimmt μ und ν nach der ersten dieser Gleichungen, so erhält man dadurch denjenigen Punkt

$$x'_{k7} = \mu x_{k5} + \nu x_{k6}$$

der Geraden $P_5' P_6'$, welche der ersten Doppelverhältnissgleichung genügt; und benutzt man die zweite Gleichung zur Bestimmung der Ableitungszahlen $\mu\ \nu$, so erhält man die Coordinaten des Punktes von $P_5' P_6'$, welcher der zweiten Doppelverhältnissgleichung genügt. Soll nun die Behauptung wahr sein, so müssen beide Werthe von $\mu\ \nu$ übereinstimmen. Da in beiden Fällen die Gleichung

$$\mu + \nu = 1$$

mit zu benutzen ist, so genügt es, nachzuweisen, dass die aus beiden Gleichungen c) sich ergebenden Verhältnisse übereinstimmen.

Zur Abkürzung setze man:

$$F_{12k} = \overline{\alpha k} \qquad F_{23k} = \overline{\beta k} \qquad F_{31k} = \overline{\gamma k},$$
$$F'_{12k} = \overline{\alpha k'} \qquad F'_{23k} = \overline{\beta k'} \qquad F'_{31k} = \overline{\gamma k'}.$$

Aus der ersten Gleichung entspringt:

$$\begin{aligned}\mu\,[m(\overline{\alpha 5}.\overline{\alpha 4'}.\overline{\beta 5'}\,\overline{\beta 4} - \overline{\alpha 5'}.\overline{\alpha 4}.\overline{\beta 5}.\overline{\beta 4'}) + n(\overline{\alpha 6}.\overline{\beta 5'}\,\overline{\alpha 4'}.\overline{\beta 4} \\ - \overline{\beta 6}.\overline{\alpha 5}\,\overline{\beta 4'}\,\overline{\alpha 4})] + \nu\,[m(\overline{\alpha 5}.\overline{\beta 6'}.\overline{\beta 4}.\overline{\alpha 4'} - \overline{\beta 5}.\overline{\alpha 6'}.\overline{\beta 4'}\,\overline{\alpha 4}) \\ + n(\overline{\alpha 6}.\overline{\beta 6'}.\overline{\beta 4}.\overline{\alpha 4'} - \overline{\beta 6}.\overline{\alpha 6'}.\overline{\beta 4'}.\overline{\alpha 4})] = 0.\end{aligned}$$

Hieraus geht die zweite Gleichung dadurch hervor, dass man β für α und γ für β setzt.

Da

$$\frac{\overline{\alpha i}}{\overline{\beta i}} : \frac{\overline{\alpha k}}{\overline{\beta k}} = \frac{\overline{\alpha i'}}{\overline{\beta i'}} : \frac{\overline{\alpha k'}}{\overline{\beta k'}},$$

und

$$\frac{\overline{\beta i}}{\overline{\gamma i}} : \frac{\overline{\beta k}}{\overline{\gamma k}} = \frac{\overline{\beta i'}}{\overline{\gamma i'}} : \frac{\overline{\beta k'}}{\overline{\gamma k'}},$$

so folgt, dass

$$\overline{\alpha i}.\overline{\beta k}.\overline{\alpha k'}.\overline{\beta i'} - \overline{\alpha i'}.\overline{\beta k'}.\overline{\alpha k}.\overline{\beta i} = 0,$$
$$\overline{\beta i}.\overline{\gamma k}.\overline{\beta k'}.\overline{\gamma i'} - \overline{\beta i'}.\overline{\gamma k'}.\overline{\beta k}.\overline{\gamma i'} = 0.$$

Demnach reduciren sich die beiden Formeln für μ und ν zu

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{m(\overline{\alpha 5}.\overline{\beta 6'}.\overline{\beta 4}.\overline{\alpha 4'} - \overline{\beta 5}.\overline{\alpha 6'}.\overline{\beta 4'}.\overline{\alpha 4})}{n(\overline{\alpha 6}.\overline{\beta 5'}.\overline{\beta 4}.\overline{\alpha 4'} - \overline{\alpha 5'}.\overline{\beta 6}.\overline{\beta 4'}.\overline{\alpha 4})},$$

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{m(\overline{\beta 5}.\overline{\gamma 6}.\overline{\gamma 4}.\overline{\beta 4'} - \overline{\gamma 5}.\overline{\beta 5'}.\overline{\gamma 4'}.\beta 4)}{n(\overline{\beta 6}.\overline{\gamma 5'}.\overline{\gamma 4}.\overline{\beta 4'} - \overline{\beta 5}.\overline{\gamma 6}.\overline{\gamma 4}.\overline{\beta 4})}.$$

Aus

$$\frac{\overline{\alpha 5}}{\overline{\beta 5}} : \frac{\overline{\alpha 4}}{\overline{\beta 4}} = \frac{\overline{\alpha 5'}}{\overline{\beta 5'}} : \frac{\overline{\alpha 4'}}{\overline{\beta 4'}}$$

folgt:

$$\overline{\beta 4'}.\overline{\alpha 4} = \overline{\alpha 4'}.\overline{\beta 4}.\frac{\overline{\beta 5'}.\overline{\alpha 5}}{\overline{\beta 5}.\overline{\alpha 5'}}.$$

Aehnlich ergiebt sich

$$\gamma 4'.\beta 4 = \overline{\beta 4}.\gamma 4.\frac{\overline{\gamma 5'}.\overline{\beta 5}}{\gamma 5.\overline{\beta 5'}}.$$

Setzt man dies in die beiden Formeln d) ein, so erhält man

$$\text{e)}\quad \begin{aligned} \frac{\mu}{\nu} &= -\frac{m.\overline{\beta 5}.\overline{\alpha 5}\,(\overline{\beta 6'}.\overline{\alpha 5'} - \overline{\beta 5'}.\overline{\alpha 6'})}{n.\overline{\beta 5'}.\overline{\alpha 5'}\,(\overline{\beta 6}.\overline{\alpha 5} - \overline{\beta 5}.\overline{\alpha 6})}, \\ \frac{\mu}{\nu} &= -\frac{m.\overline{\beta 5}.\overline{\gamma 5}\,(\overline{\gamma 6'}.\overline{\beta 5'} - \overline{\gamma 5'}.\overline{\beta 6'})}{n.\overline{\beta 5'}.\overline{\gamma 5'}\,(\overline{\gamma 6}.\overline{\beta 5} - \overline{\gamma 5}.\overline{\beta 6})}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen der Doppelverhältnisse für die Punkte $P_5\, P_6\, P_5'\, P_6'$ folgt:

$$\overline{\alpha 6'}\cdot\overline{\beta 5'} = \overline{\alpha 5'}.\overline{\beta 6'}\cdot\frac{\overline{\alpha 6}.\overline{\beta 5}}{\overline{\beta 6}.\overline{\alpha 5}},$$

$$\overline{\beta 6'}.\overline{\gamma 5'} = \overline{\beta 5'}.\overline{\gamma 6'}\cdot\frac{\overline{\beta 6}.\overline{\gamma 5}}{\overline{\gamma 6}.\overline{\beta 5}}.$$

Setzt man dies in e) ein, so folgt nach gehöriger Reduction

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\overline{\beta 5}}{\overline{\beta 5'}}\cdot\frac{\overline{\beta 6'}}{\overline{\beta 6}},$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\overline{\gamma 5}}{\overline{\gamma 5'}}\cdot\frac{\overline{\gamma 6'}}{\overline{\gamma 6}}.$$

Die Gleichung

$$\frac{\overline{\beta 5}}{\overline{\gamma 5}} : \frac{\overline{\beta 6}}{\overline{\gamma 6}} = \frac{\overline{\beta 5'}}{\overline{\gamma 5'}} : \frac{\overline{\beta 6'}}{\overline{\gamma 6'}}$$

ergiebt

$$\frac{\overline{\beta 5}}{\overline{\beta 5'}}\cdot\frac{\overline{\beta 6'}}{\overline{\beta 6}} = \frac{\overline{\gamma 5}}{\overline{\gamma 5'}}\cdot\frac{\overline{\gamma 6'}}{\overline{\gamma 6}},$$

d. i. übereinstimmende Werthe der beiden Ausdrücke für $\mu : \nu$, q. e. d.

3. Setzt man in den Gleichungen entsprechender Geraden §. 1, 7 q) und β) abkürzend

$$\alpha_m\,\alpha_n = c_p, \qquad \beta_m\,\beta_n = d_p$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} \end{vmatrix} = \mathfrak{X}_p \qquad \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_{1m}' & x_{2m}' & x_{3m}' \\ x_{1n}' & x_{2n}' & x_{3n}' \end{vmatrix} = \mathfrak{X}_p',$$

so gewinnen diese Gleichungen folgende Form:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} T &\equiv l_1 c_1 \mathfrak{X}_1 + l_2 c_2 \mathfrak{X}_2 + l_3 c_3 \mathfrak{X}_3 = 0, \\ T' &\equiv l_1 d_1 \mathfrak{X}_1' + l_2 d_2 \mathfrak{X}_2' + l_3 d_3 \mathfrak{X}_3' = 0. \end{aligned}$$

Jedem Paare von Geraden entspricht ein bestimmtes Verhältniss $l_1 : l_2 : l_3$. Die eine Gerade T_k und ihre entsprechende T_k' charakterisirenden l_i mögen mit dem zweiten Index k versehen werden. Ferner werde T_k bez. T_k' durch Multiplication mit A_k bez. A_k' auf die erste Normalform gebracht.

Man wähle zwei Gerade $T_4\,T_5$ und zwei Punkte $P_4\,P_5$ willkürlich; die Entfernung des Punktes P_a von der Geraden T_b sei ξ_{ba}; die Entfernung P_a' von T_b' sei ξ_{ba}'. Alsdann ist

$$\xi_{ba} = \frac{2\,h_1\,h_2\,h_3}{\varDelta} \cdot D \,.\, A_b \cdot \frac{1}{\sigma_a} \Sigma (l_{ib}\, c_i\, \lambda_{ia}\, \alpha_i) \qquad i = 1,\, 2,\, 3,$$

$$\xi_{ba}' = \frac{2\,h_1\,h_2\,h_3}{\varDelta} \cdot D' \cdot A_b' \cdot \frac{1}{\tau_a} \Sigma (l_{ia}\, d_i\, \lambda_{ia}\, \beta_i) \qquad i = 1,\, 2,\, 3.$$

Oder, da $c_i\,\alpha_i = \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, $d_i'\beta_i = \beta_1\,\beta_2\,\beta_3$, so ist

b)
$$\xi_{ba} = \frac{2\,h_1\,h_2\,h_3}{\varDelta} \cdot D \,.\, A_b \cdot \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}{\sigma_a} \cdot (l_{1b}\,\lambda_{1a} + l_{2b}\,\lambda_{2a} + l_{3b}\,\lambda_{3a}),$$
$$\xi_{ba}' = \frac{2\,h_1\,h_2\,h_3}{\varDelta} \cdot D' \,.\, A_b' \; \frac{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3}{\tau_a} \cdot (l_{1b}\,\lambda_{1a} + l_{2b}\,\lambda_{2a} + l_{3b}\,\lambda_{3a}).$$

Hieraus folgt

c)
$$\frac{\xi_{4a}}{\xi_{5a}} = \frac{A_4}{A_5} \cdot \frac{l_{14}\,\lambda_{1a} + l_{24}\,\lambda_{2a} + l_{34}\,\lambda_{3a}}{l_{14}\,\lambda_{1a} + l_{25}\,\lambda_{2a} + \lambda_{35}\,\lambda_{3a}},$$
$$\frac{\xi_{4a}'}{\xi_{5a}'} = \frac{A_4'}{A_5'} \cdot \frac{l_{14}\,\lambda_{1a} + l_{24}\,\lambda_{2a} + l_{34}\,\lambda_{3a}}{l_{15}\,\lambda_{1a} + l_{25}\,\lambda_{2a} + \lambda_{35}\,\lambda_{3a}},$$

folglich ist

d)
$$\frac{\xi_{4a}}{\xi_{5a}} : \frac{\xi_{4a}'}{\xi_{5a}'} = \frac{A_4}{A_5} : \frac{A_4'}{A_5'}.$$

Wendet man diese Gleichung auf die Punkte P_4 und P_5 an, so ergiebt sich dieselbe rechte Seite; die daraus resultirende Gleichung der linken Seiten lässt sich schreiben:

e)
$$\frac{\xi_{44}}{\xi_{54}} : \frac{\xi_{44}}{\xi_{55}} = \frac{\xi_{44}'}{\xi_{54}'} : \frac{\xi_{45}'}{\xi_{55}'}.$$

Der hierin liegende Lehrsatz ist eine einfache geometrische Folgerung des in voriger Nummer bewiesenen Hauptsatzes der ebenen Collineation.

4. Alle Punkte P' bez. P, für welche

$$\lambda_1\,\beta_1 + \lambda_2\,\beta_2 + \lambda_3\,\beta_3 = 0,$$
$$\text{bez. } \lambda_1\,\alpha_1 + \lambda_2\,\alpha_2 + \lambda_3\,\alpha_3 = 0,$$

liegen unendlich fern.

Alle den unendlich fernen Punkten in der zweiten bez. der ersten Ebene entsprechenden Punkte der andern Ebene erfüllen dieselbe Gleichung der λ; die entsprechenden der unendlich fernen Punkte jeder Ebene bilden demnach zwei Gerade. Diese beiden Geraden heissen die Gegenaxen der Ebenen und mögen mit G_∞, bez. G'_∞ (entsprechend den unendlich fernen Punkten in der zweiten bez. der ersten Ebene) bezeichnet werden.

Demnach erfüllen die λ der Punkte

a)
$$\text{von } G_\infty \text{ die Gleichung } \tau \equiv \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 = 0,$$
$$\text{„ } G'_\infty \text{ „ „ } \sigma \equiv \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0.$$

Die Gleichungen zweier entsprechenden Geraden erhalten durch Division der in 3 a) gegebenen Formen durch $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ bez. $\beta_1\beta_2\beta_3$ die Gestalt:

b)
$$T \equiv \frac{l_1}{\alpha_1}\mathfrak{X}_1 + \frac{l_2}{\alpha_2}\mathfrak{X}_2 + \frac{l_3}{\alpha_3}\mathfrak{X}_3 = 0,$$
$$T' \equiv \frac{l_1}{\beta_1}\mathfrak{X}_1' + \frac{l_2}{\beta_2}\mathfrak{X}_2' + \frac{l_3}{\beta_3}\mathfrak{X}_3' = 0.$$

Die Gleichungen der die unendlich fernen Punkte enthaltenden unendlich fernen Geraden der beiden Ebenen können geschrieben werden

$$\text{für die zweite Ebene: } T'_\infty \equiv \mathfrak{X}_1' + \mathfrak{X}_2' + \mathfrak{X}_3' = 0,$$
$$\text{„ „ erste „ } T_\infty \equiv \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = 0.$$

Die erste Gleichung entsteht aus b) durch die Coefficienten
$$l_1 = \beta_1, \quad l_2 = \beta_2, \quad l_3 = \beta_3,$$
die zweite durch
$$l_1 = \alpha_1, \quad l_2 = \alpha_2, \quad l_3 = \alpha_3.$$
Demnach sind die Gleichungen der Gegenaxen:

c)
$$G_\infty \equiv \frac{\beta_1}{\alpha_1}\mathfrak{X}_1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\mathfrak{X}_2 + \frac{\beta_3}{\alpha_3}\mathfrak{X}_3 = 0,$$
$$G'_\infty \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathfrak{X}_1' + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathfrak{X}_2' + \frac{\alpha_3}{\beta_3}\mathfrak{X}_3' = 0.$$

Die Erweiterungscoefficienten A und A', durch welche die Gleichungen der Gegenaxen auf die Normalform gebracht werden, lassen sich in folgender Form darstellen:

Der Punkt P_k bez. P'_k ($k = 1, 2, 3$) habe den Abstand p_k bez. p'_k von G_∞ bez. G'_∞, so ist

$$p_k = A \cdot \frac{\beta_k}{\alpha_k} \cdot DD(P_1 P_2 P_3),$$

$$p_k' = A' \cdot \frac{\alpha_k}{\beta_k} \cdot DD(P_1' P_2' P_3').$$

Die Strecken p_k und p_k' lassen sich als die Plücker'schen Coordinaten von G_∞ und G'_∞ in Bezug auf das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ bez. $P_1' P_2' P_3'$ ansehen. Sind $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ und $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ die den gleichbezifferten Ecken anliegenden Winkel beider Dreiecke, so erfüllen die Strecken p demnach die beiden Identitäten:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2p_1 p_2 \cos\mu_3 - 2p_2 p_3 \cos\mu_1 - 2p_3 p_1 \cos\mu_2 = 4D^2,$$
$$p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 - 2p_1' p_2' \cos\nu_3 - 2p_2' p_3' \cos\nu_1 - 2p_3' p_1' \cos\nu_2 = 4D'^2.$$

Setzt man hier die oben gefundenen Werthe ein und drückt die Dreiecksdeterminanten durch die Flächen der beiden Dreiecke aus, so erhält man:

$$\frac{1}{A^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{\varDelta^2}\left(\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2} - 2\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\cos\mu_3 - 2\frac{\beta_2\beta_3}{\alpha_2\alpha_3}\cos\mu_1 - 2\frac{\beta_3\beta_1}{\alpha_3\alpha_1}\cos\mu_2\right),$$

$$\frac{1}{A'^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{\varDelta^2}\left(\frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{\beta_3^2} - 2\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\cos\nu_3 - 2\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2\beta_3}\cos\nu_1 - 2\frac{\alpha_3\alpha_1}{\beta_3\beta_1}\cos\nu_2\right).$$

Die reciproken Werthe der beiden auf den rechten Seiten auftretenden Polynome mögen mit B^2 und B'^2 bezeichnet werden. Nimmt man für B und B' die Wurzel mit dem Vorzeichen, welches dem Erweiterungscoefficienten zukommt, so hat man die gewünschten Formeln:

$$A = \frac{\varDelta}{h_1 h_2 h_3} \cdot B,$$

$$A' = \frac{\varDelta}{h_1 h_2 h_3} \cdot B'.$$

5. Seien P und P' zwei beliebige entsprechende Punkte, A und A' die Coefficienten, mit denen G_∞ bez. G'_∞ multiplicirt werden müssen, um auf die erste Normalform zu kommen, p der Abstand des Punktes P von G_∞, p' der des Punktes P' von G'_∞. Alsdann erhält man durch Substitution von

$$x_k = (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{k3}) : \sigma,$$
$$\text{bez. } x_k' = (\lambda_1 \beta_1 x_{k1}' + \lambda_2 \beta_2 x_{k2}' + \lambda_3 \beta_3 x_{k3}') : \tau,$$

in die Gleichungen der Gegenaxen 4 c) die Formeln:

a)
$$p = A \cdot \frac{\tau}{\sigma} \cdot \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\Delta} \cdot D,$$
$$p' = A' \cdot \frac{\sigma}{\tau} \cdot \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\Delta} \cdot D'.$$

Durch Multiplication erhält man einen von τ und σ, d. i. von der Lage der Punkte P und P' unabhängigen Ausdruck:

b)
$$p \cdot p' = \frac{4 h_1^2 h_2^2 h_3^2}{\Delta^2} \cdot D \cdot D' \cdot A \cdot A'.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz: Das Product der Abstände zweier entsprechender Punkte von den beiden Gegenaxen ist eine constante Grösse.

Durch Substitution der oben berechneten Werthe für A und A' erhält man das constante Product pp' unabhängig vom Coordinatensystem:

c)
$$p \cdot p' = 4 . DD' . BB'.$$

6. Alle zu T parallelen Geraden haben die Gleichungsform

a)
$$T_1 \equiv T + k . T_\infty = 0,$$

woraus man durch Variation des k von $-\infty$ bis $+\infty$ alle zu T parallelen Geraden erhält.

Setzt man in a)

$$T = \frac{l_1}{\alpha_1}\mathfrak{T}_1 + \frac{l_2}{\alpha_2}\mathfrak{T}_2 + \frac{l_3}{\alpha_3}\mathfrak{T}_3,$$
$$T_\infty = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3,$$

so erhält man

$$T_1 \equiv (l_1 + k\alpha_1)\frac{1}{\alpha_1}\mathfrak{T}_1 + (l_2 + k\alpha_2)\frac{1}{\alpha_2}\mathfrak{T}_2 + (l_3 + k\alpha_3)\frac{1}{\alpha_3}\mathfrak{T}_3 = 0.$$

Dieser Geraden entspricht:

$$T_1' \equiv (l_1 + k\alpha_1)\frac{1}{\beta_1}\mathfrak{T}_1' + (l_2 + k\alpha_2)\frac{1}{\beta_2}\mathfrak{T}_2' + (l_3 + k\alpha_3)\frac{1}{\beta_3}\mathfrak{T}_3' = 0,$$

oder:

b)
$$T_1' \equiv T' + k . G'_\infty = 0.$$

Umgekehrt entspricht einer Parallelen T_1' zu einer beliebigen Geraden der zweiten Ebene T',

$$T_1' \equiv T' + k . T_\infty = 0$$

eine Gerade T_1 mit der Gleichung:

c) $$T_1 \equiv T + k \,.\, G_\infty = 0.$$

Aus b) und c) folgt der

Lehrsatz: Einer Schaar paralleler Geraden der einen Ebene entspricht ein Büschel in der andern Ebene, dessen Centrum auf der Gegenaxe dieses Systems gelegen ist.

Dies Büschelcentrum hat man als den Punkt zu betrachten, welcher dem unendlich fernen Punkte entspricht, der in der Richtung der auf der andern Ebene gezogenen Parallelen liegt.

Eine Parallele zur Gegenaxe hat die Gleichung:

d) $$G_\infty + k\, T_\infty = 0.$$

Die Gleichung der entsprechenden Geraden ist nach dem Vorhergehenden:

$$T'_\infty + k\, G'_\infty = 0, \quad \text{oder}$$

e) $$G'_\infty + \frac{1}{k} T'_\infty = 0.$$

Die Parallelen zu den Gegenaxen beider Ebenen sind paarweis entsprechende Gerade.

Die Entfernungen je zweier entsprechenden Parallelen zu den beiden Gegenaxen werden durch die Gleichung 5 b) verbunden.

7. Dem unendlich fernen Punkte einer Geraden entspricht derjenige Punkt, in welchem die der ersten entsprechende Gerade die Gegenaxe dieser Ebene schneidet.

Dem unendlich fernen Punkte einer Parallelen zur Gegenaxe des einen Systems entspricht demnach der unendlich ferne Punkt der entsprechenden Parallelen des andern Systems.

Hieraus folgt, dass die entsprechenden Parallelen zu den Gegenaxen ähnliche Punktreihen enthalten.

Man kann dieses Resultat auch auf folgendem Wege gewinnen:

Seien $P_a P$ zwei beliebige Punkte der einen Ebene, $P'_a P'$ die entsprechenden der andern, und seien die Coordinaten eines Punktes P_b der Geraden $P_a P$ abgeleitet nach

$$x_{kb} = m x_{ka} + n x_k, \qquad m + n = 1,$$

während für den entsprechenden Punkt P'_b gelte:

$$x'_{kb} = \mu x'_{ka} + \nu x'_k, \qquad \mu + \nu = 1,$$

so ist die Aehnlichkeit beider Punktreihen $P_a P'$ und $P'_a P'$ ausreichend und nothwendig bedingt durch

$$m = \mu, \qquad n = \nu.$$

Setzt man für x_{ka} x_k x'_{ka} x'_k ihre Werthe ausgedrückt durch x_{k1} x_{k2} x_{k3}, so erhält man

$$x_{kb} = \left(\frac{m\lambda_{1a}}{\sigma_a} + \frac{n\lambda_1}{\sigma}\right)\alpha_1 x_{k1} + \left(\frac{m\lambda_{2a}}{\sigma_a} + \frac{n\lambda_2}{\sigma}\right)\alpha_2 x_{k2} + \left(\frac{m\lambda_{3a}}{\sigma_a} + \frac{n\lambda_3}{\sigma}\right)\alpha_3 x_{k3},$$

$$x'_{kb} = \left(\frac{m\lambda_{1a}}{\tau_a} + \frac{n\lambda_1}{\tau}\right)\beta_1 x'_{k1} + \left(\frac{m\lambda_{2a}}{\tau_a} + \frac{n\lambda_2}{\tau}\right)\beta_2 x'_{k2} + \left(\frac{m\lambda_{3a}}{\tau_a} + \frac{n\lambda_3}{\tau}\right)\beta_3 x'_{k3}.$$

Sollen diese beiden Punkte unabhängig von m und n entsprechend sein, so muss unabhängig von m und n die Verhältnissgleichung gelten

$$\left(\frac{m\lambda_{1a}}{\sigma_a} - \frac{n\lambda_1}{\sigma}\right) : \left(\frac{m\lambda_2{}^a}{\sigma_a} - \frac{n\lambda_2}{\sigma}\right) : \left(\frac{m\lambda_{3a}}{\sigma_a} - \frac{n\lambda_3}{\sigma}\right)$$
$$= \left(\frac{m\lambda_{1a}}{\tau_a} - \frac{n\lambda_1}{\tau}\right) : \left(\frac{m\lambda'_{2a}}{\tau_a} - \frac{n\lambda_2}{\tau}\right) : \left(\frac{m\lambda_{3a}}{\tau_a} - \frac{n\lambda_3}{\tau}\right).$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies ausreichend und nothwendig bedingt ist durch

$$\sigma_a\tau - \tau_a\sigma = 0.$$

Alle Punkte, deren λ diese lineare Gleichung erfüllen, gehören zwei entsprechenden Geraden an. Diese Geraden enthalten den Punkt P_a bez. P'_a; denn für diese Punkte werden τ und σ bez. zu τ_a und σ_a. Ferner enthält jede Gerade, die durch eine Gleichung der Form

$$m\tau - n\sigma = 0$$

charakterisirt wird, den Punkt, für welchen zugleich

$$\tau = 0 \text{ und } \sigma = 0,$$

d. i. den in der Gegenaxe $\tau = 0$ bez. $\sigma = 0$ gelegenen Punkt der unendlich fernen Geraden $\sigma = 0$ in der ersten, $\tau = 0$ in der zweiten Ebene. Die der Gleichung

$$m\tau - n\sigma = 0$$

zugehörigen zwei entsprechenden Geraden gehen demnach den Gegenaxen parallel. Es sind demnach je zwei entsprechende Parallelen zu den Gegenaxen ähnliche Punktreihen, q. e. d.

8. **Lehrsatz**: Der geometrische Ort für die Spitzen der Dreiecke, welche über derselben Basis construirt sind und deren Flächen zu den Flächen der ihnen entspre-

chenden Dreiecke ein constantes Verhältniss haben, ist eine Parallele zur Gegenaxe, — der Ort für die Spitzen der entsprechenden Dreiecke mithin die entsprechende Parallele zur Gegenaxe der zweiten Ebene.

Beweis. Die Basis sei $P_4 P_5$, die variable Spitze P; mithin $P_4' P_5' P'$ das entsprechende Dreieck. Die Flächen der beiden Dreiecke sind nach §. 2, 1 a):

$$P_4 P_5 P = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma} \cdot L \cdot D,$$

$$P_4' P_5' P' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\tau_4 \tau_5 \tau} \cdot L \cdot D',$$

wobei

$$L = \begin{vmatrix} \lambda_{14} & \lambda_{24} & \lambda_{34} \\ \lambda_{15} & \lambda_{25} & \lambda_{35} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Soll nun das Verhältniss beider Flächen den constanten Werth k haben, so ergiebt sich folgende Bedingungsgleichung für $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$:

a) $$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sigma_4 \sigma_5 \sigma} \cdot D : \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\tau_4 \tau_5 \tau} \cdot D' = k.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \tau_4 \tau_5 \,.\, D \,.\, \tau - k \,.\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \sigma_4 \sigma_5 \,.\, D' \,.\, \sigma = 0.$$

Diese Gleichung hat die allgemeine Form

$$m\tau - n\sigma = 0,$$

ihr gehören demnach zwei entsprechende Parallelen zu den Gegenaxen zu.

Nimmt man zur Umkehrung an, dass zwei über entsprechenden Basen $P_4 P_5$ bez. $P_4' P_5'$ construirte entsprechende Dreiecke ihre Spitzen in entsprechenden Punkten zweier (entsprechenden) Parallelen zu den Gegenaxen finden, so variiren die λ, dieser Spitzen gemäss einer Gleichung von der Form

$$m\tau - n\sigma = 0.$$

Man schreibe für dieselbe

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \tau_4 \tau_5 D \,.\, \tau = \frac{n}{m} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \tau_4 \tau_5 D}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \sigma_4 \sigma_5 D'} \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \sigma_4 \sigma_5 D' \sigma,$$

so folgt aus a):

$$\frac{P_4 P_5 P}{P_4' P_5' P'} = \frac{n \,.\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \,.\, \tau_4 \tau_5 \,.\, D}{m \,.\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \,.\, \sigma_4 \sigma_5 \,.\, D'},$$

also ist dies Verhältniss für alle und nur für die entsprechenden

Punkte P und P' entsprechender Parallelen zu den Gegenaxen constant, q. e. d.

Lehrsatz: Der geometrische Ort für die Punkte, deren Abstand von einer festen Geraden zum Abstand der entsprechenden Punkte von der entsprechenden Geraden ein constantes Verhältniss haben, ist eine Parallele zur Gegenaxe; die entsprechenden Punkte der andern Ebene liegen demnach in der entsprechenden Parallelen zur Gegenaxe dieser Ebene.

Beweis. Die feste Gerade habe die Gleichung $T_a = 0$, die entsprechende $T'_a = 0$, welche in derselben Form wie in Nro. 3 vorausgesetzt werden mögen.

Dann ist nach Nro. 3 b) das Verhältniss der Abstände entsprechender Punkte P und P' von T_a bez. T'_a:

$$\frac{\xi_b}{\xi'_b} = \frac{D \,.\, A_b \,.\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \,.\, \tau}{D' \,.\, A'_b \,.\, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \,.\, \sigma}.$$

Soll das Verhältniss den constanten Werth k besitzen, so ergiebt dies für τ und σ eine Bedingungsgleichung von der Form

$$m\tau - n\sigma = 0,$$

dem Lehrsatze entsprechend.

Aus diesem Beweise und der Giltigkeit der Umkehrung desselben besteht der vollständige Beweis des Lehrsatzes.

Derselbe ist eine einfache geometrische Folgerung des vorhergehenden Satzes.

9. Zwei dem Punkte P unendlich nahe benachbarte Punkte $P_4\, P_5$ und die dem entsprechenden Punkte P' unendlich nahen Entsprechenden $P_4'\, P_5'$ werden erhalten, wenn man den für P charakteristischen Coefficienten $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ zwei verschiedene verschwindend kleine Variationen ertheilt.

Nach §. 2, 1 a) ist

$$\frac{P P_4 P_5}{P' P_4' P_5'} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \,.\, D}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \,.\, D'} \cdot \frac{\tau \tau_4 \tau_5}{\sigma \sigma_4 \sigma_5}.$$

Die den Punkten $P_4\, P_5\, P_4'\, P_5'$ zugehörigen Summen $\sigma_4\, \sigma_5\, \tau_4\, \tau_5$ sind von den zu P und P' gehörenden Werthen σ und τ unendlich wenig verschieden. Folglich ist

$$Lim \frac{\tau \tau_4 \tau_5}{\sigma \sigma_4 \sigma_5} = \frac{\tau^3}{\sigma^3},$$

und demnach

a) $$\frac{P P_4 P_5}{P' P_4' P_5'} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 . D}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 . D'} \cdot \frac{\tau^3}{\sigma^3}.$$

Hieraus folgt der

Lehrsatz: Das Verhältniss zweier entsprechenden unendlich kleinen Flächen ist nur abhängig von der Lage, nicht von der Gestalt derselben.

Oder: Das Verhältniss zweier an entsprechenden Punkten gelegenen entsprechenden Flächen ist eine Function dieser Punkte.

10. Lehrsatz: Die beiden entsprechenden geometrischen Oerter der entsprechenden Punkte, für welche das Verhältniss entsprechender Flächenelemente constant ist, sind zwei entsprechende Parallelen zu den Gegenaxen.

Beweis. Aus Nro. 9 a) folgt für derartige Punkte, wenn das constante Flächenverhältniss $= k$ ist:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 D}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 D'} \cdot \frac{\tau^3}{\sigma^3} = k.$$

Diese cubische Gleichung liefert nur eine reelle Wurzel für das Verhältniss $\frac{\tau}{\sigma}$. Setzt man den reellen Werth von

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 D}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 D'}} = m, \quad \sqrt[3]{k} = n,$$

so ergiebt sich die reelle Wurzel $\tau : \sigma$ aus

$$m \frac{\tau}{\sigma} = n.$$

Demnach erfüllen alle die fraglichen Punkte P und P' die Gleichung

$$m\tau - n\sigma = 0,$$

liegen also auf entsprechenden Parallelen zu den Gegenaxen.

Die Umkehrung des eben Bewiesenen vervollständigt den Beweis des Lehrsatzes.

11. Die in den vorigen beiden Nummern entwickelten Sätze und Formeln geben ein einfaches Mittel an die Hand, um das Verhältniss γ entsprechender Strecken auf zwei entsprechenden ähnlichen Geraden zu bestimmen (Nro. 7).

Das Verhältniss entsprechender Strecken ist hier wegen der Aehnlichkeit gleich dem Verhältniss unendlich kleiner entsprechender Strecken; und dieses Verhältniss ist der Quotient aus dem Ver-

hältniss der Flächen entsprechender, über den verschwindenden Strecken als Basen construirter differentieller Dreiecke und dem Verhältniss der Höhen derselben.

Das Verhältniss der differentiellen Flächen für zwei entsprechende durch die Punkte P und P' gezogenen Parallelen zu den Gegenaxen ist nach Nro. 9

$$k = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 . D . \tau^3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 . D' . \sigma^3}.$$

Das Verhältniss der Höhen, d. i. der Abstände nächst benachbarter entsprechender Parallelen bestimmt sich aus

$$p . p' = 4 DD' . BB' \text{ (Nro. 5 c)}$$

zu

$$\frac{dp}{dp'} = - 4 DD' . BB' \cdot \frac{1}{p'^2}.$$

Setzt man hier für p' den aus Nro. 5 a) folgenden Werth, so erhält man

a) $$\frac{dp}{dp'} = - \frac{D . B . \tau^2}{D' . B' . \sigma^2}.$$

Hieraus ergiebt sich das gewünschte Verhältniss

b) $$\gamma = k : \frac{dp}{dp'} = - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 . B' . \tau}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 . B . \sigma}.$$

Ueber die Bedeutung des Vorzeichens von γ giebt folgende Bemerkung Aufschluss:

Werden die beiden entsprechenden Parallelen zu den Gegenaxen in vom Fixpunkt aus gesehen gleichen Richtungen durchlaufen, so haben alle Dreiecke, deren Spitzen auf gleichnamigen Seiten der Parallelen liegen, gleiche Zeichen, im Gegenfalle ungleiche.

Werden hingegen die entsprechenden Parallelen so zurückgelegt, dass die Bewegungen vom Fixpunkt aus gesehen entgegengesetzt gerichtet erscheinen, so haben alle die Dreiecke gleiche Zeichen, deren Spitzen auf ungleichnamigen Seiten der Parallelen liegen, im Gegenfalle ungleiche.

Da

$$k = - \gamma \frac{\tau^2}{\sigma^2} \frac{BD}{B'D'} = - \gamma \frac{\tau^2}{\sigma^2} \cdot pp' \cdot \frac{1}{B'^2 D'^2},$$

so haben demnach k und γ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem pp' negativ oder positiv ist.

Ist aber pp' positiv, so ist $dp : dp'$ negativ; die Spitzen der

entsprechenden differentiellen Dreiecke liegen demnach auf ungleichnamigen Seiten der Basen; ist hingegen pp' negativ, so liegen die Spitzen auf gleichnamigen Seiten der Basen.

Nennt man nun zwei entsprechende Gerade gleichsinnig oder ungleichsinnig, je nachdem entsprechende Strecken derselben von entsprechenden Endpunkten aus vom Fixpunkte aus gesehen in gleichen Richtungen durchlaufen werden oder nicht, so erhält man folgendes Resultat:

Ist $\gamma > 0$, so sind die zu γ gehörigen entsprechenden Parallelen gleichsinnig ähnlich.

Ist $\gamma < 0$, so sind die Parallelen ungleichsinnig ähnlich.

12. Es giebt ein Paar entsprechende gleichsinnig congruente Gerade und ein Paar entsprechende ungleichsinnig congruente Gerade.

Für das erstere Paar ist

a) $$\frac{\sigma}{\tau} = -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 B'}{\beta_1\beta_2\beta_3 B},$$

für das zweite:

b) $$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 B'}{\beta_1\beta_2\beta_3 B}.$$

Zwei symmetrische Parallele zur Gegenaxe eines Systems entsprechen zwei symmetrischen Parallelen zur Gegenaxe des andern Systems und bilden mit ihnen zwei Paare entsprechender Geraden, deren γ sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden.

Denn sind zwei Parallelen um p_1 und p_2 von G_∞ entfernt, die entsprechenden um p_1' und p_2' von G'_∞, so folgt aus

$$p_1 p_1' = p_2 p_2',$$

dass wenn $p_2 = -p_1$ ist, auch $p_2' = -p_1'$ sein muss.

Gehört ferner den Parallelen im Abstande p_k bez. p_k' das Verhältniss $\sigma_k : \tau_k$ (5. a) zu, so folgt, dass

$$\frac{\sigma_2}{\tau_2} = -\frac{\sigma_1}{\tau_1}.$$

Demnach ist:

$$\gamma_2 = -\gamma_1, \quad \text{q. e. d.} -$$

Ist das Verhältniss γ entsprechender Strecken zweier ähnlichen Geraden gegeben, so sind die Entfernungen derselben von den Gegenaxen:

c)
$$p = -2\gamma \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{B^2 D}{B'},$$
$$p' = -2\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{B'^2 D'}{B}.$$

Für die beiden gleichsinnig congruenten Geraden werden diese Entfernungen zu:

d)
$$p = -2\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{B^2 D}{B'},$$
$$p' = -2\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{B'^2 D'}{B}.$$

Für die ungleichsinnigen congruenten Geraden ergiebt sich:

e)
$$p = 2\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{B^2 D}{B'},$$
$$p' = 2\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{B'^2 D'}{B}.$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen entsprechender Parallelen zu den Gegenaxen aus dem Verhältniss γ wie folgt ableiten:

Die Gleichungen $\mathfrak{T} = 0$, $\mathfrak{T}' = 0$ zweier entsprechenden ähnlichen Geraden sind von der Form

$$\mathfrak{T} = \Sigma \frac{\mu \alpha_i + \nu \beta_i}{\alpha_i} \mathfrak{T}_i,$$
$$\mathfrak{T}' = \Sigma \frac{\mu \alpha_i + \nu \beta_i}{\beta_i} \mathfrak{T}_i', \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Gleichungen von zwei parallelen Geraden, deren linke Seiten sich nur durch ein Vielfaches von T_∞ unterscheiden, werden durch denselben Multiplicator auf die Normalform gebracht. Sei A_1 der Multiplicator von

$$\mathfrak{T} = 0 \text{ und } \Sigma \frac{\nu \beta_i}{\alpha_i} \mathfrak{T}_i = 0,$$

und A_1' der Multiplicator von

$$\mathfrak{T}' = 0 \text{ und } \Sigma' \frac{\mu \alpha_i}{\beta_i} \mathfrak{T}_i' = 0,$$

so ist
$$A_1 = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{B}{\nu}, \quad A_1' = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{B'}{\mu}.$$

Die Abstände p und p' der beiden Geraden von den Gegenaxen können als die Entfernungen eines Punktes der Gegenaxen von den Geraden berechnet werden.

Für jeden Punkt von G_∞ ist

$$\Sigma \mu \mathfrak{T}_i = \mu . D \cdot \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\Delta}, \quad \Sigma \nu \frac{\beta_i}{\alpha_i} \mathfrak{T}_i = 0;$$

ür jeden Punkt von G'_∞:

$$\Sigma \frac{\mu \alpha_i}{\beta_i} \mathfrak{T}'_i = 0, \quad \Sigma \nu \mathfrak{T}'_i = \nu D' \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\Delta}.$$

Demnach ist

$$p = 2 \frac{\mu}{\nu} B D, \quad p' = 2 \frac{\nu}{\mu} B' D'.$$

Vergleicht man dies mit den oben für p und p' gefundenen Werthen, so folgt

$$\frac{\mu}{\nu} = -\gamma \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{B}{B'}.$$

Man kann demnach wählen

f) $$\mu = -\gamma \beta_1 \beta_2 \beta_3 B, \quad \nu = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 B'.$$

Hieraus ergeben sich dann noch

g) $$A_1 = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{B}{B'}, \quad A_1' = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{B'}{B}.$$

13. Congruente entsprechende Büschel. In congruenten Büscheln ist der Winkel zwischen je zwei Strahlen des einen Büschels gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen des andern Büschels. Da nun die entsprechenden Strahlen entsprechender Büschel auf den congruenten Geraden gleiche Strecken abschneiden, so bilden demnach die entsprechenden Strahlen congruenter Büschel mit den congruenten Geraden gleiche Winkel, und die Entfernungen der Centren congruenter Büschel von den congruenten Geraden sind in beiden Systemen — ohne Rücksicht auf die Vorzeichen — gleich.

Da nun die entsprechenden Strahlen congruenter Büschel gleiche Winkel mit den congruenten Geraden bilden, so sind sie von allen entsprechenden Punkten der congruenten Geraden gleich weit entfernt, wiederum zunächst ohne Rücksicht auf die Richtung.

Allgemeiner findet man, dass das Verhältniss der Entfernungen zweier entsprechenden Punkte auf je zwei entsprechenden ähnlichen Geraden von je zwei entsprechenden Strahlen der congruenten Büschel positiv oder negativ dem Verhältniss γ der auf den ähnlichen Geraden liegenden entsprechenden Strecken gleich ist.

Nimmt man demnach in Nro. 3 b) für $P_a P'_a$ je zwei entsprechende Punkte zweier ähnlichen Geraden, für $T_b T'_b$ zwei entspre-

chende Strahlen zweier congruenten Büschel und lässt die Indices b und a hinweg, so ist für

$$\gamma = -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2\beta_3}\cdot\frac{B'}{B}\cdot\frac{\tau}{\sigma},$$
$$\xi : \xi' = \pm\gamma;$$

mithin:

$$\frac{D.A.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\tau}{D'.A'.\beta_1\beta_2\beta_3\sigma} = \mp\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3.B'.\tau}{\beta_1\beta_2\beta_3.B.\sigma}.$$

Hieraus ergiebt sich als die Bedingung, welche von den $l_1 l_2 l_3$ in den Gleichungen der Strahlen congruenter Büschel erfüllt wird:

a) $$DAB = \mp D'A'B',$$

oder in rationeller Form und beide Fälle umfassend:

b) $$D^2A^2B^2 = D'^2A'^2B'^2.$$

Um den Coefficienten A zu erhalten, berechne man die Abstände ξ_k der Punkte $P_1 P_2 P_3$ und setze diese Plücker'schen Coordinaten von T in die bekannte Identität ein.

Aus Nro. 3 b) folgt

c) $$\xi_k = \frac{2}{\Delta}.h_1h_2h_3.D.\alpha_1\alpha_2\alpha_3.A.\frac{l_k}{\alpha_k}.$$

Sind $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ die Seiten, $\mu_1\mu_2\mu_3$ die gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$, so erfüllen die ξ_k die Gleichung

$$\xi_1^2\gamma_1^2 + \xi_2^2\gamma_2^2 + \xi_3^2\gamma_3^2 - 2\xi_1\xi_2\gamma_1\gamma_2\cos\mu_3$$
$$- 2\xi_2\xi_3\gamma_2\gamma_3\cos\mu_1 - 2\xi_3\xi_1\gamma_3\gamma_1\cos\mu_2 = 4D^2.$$

Substituirt man hier die Werthe ξ_k aus c), so folgt:

$$\frac{1}{A^2} = \frac{h_1^2h_2^2h_3^2}{\Delta^2}.\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\left[\frac{l_1^2}{\alpha_1^2}\gamma_1^2 + \frac{l_2^2}{\alpha_2^2}\gamma_2^2 + \frac{l_3^2}{\alpha_3^2}\gamma_3^2\right.$$
$$\left.- 2\frac{l_1l_2}{\alpha_1\alpha_2}\gamma_1\gamma_2\cos\mu_3 - 2\frac{l_2l_3}{\alpha_2\alpha_3}\gamma_2\gamma_3\cos\mu_1 - 2\frac{l_3l_1}{\alpha_3\alpha_1}\cos\mu_2\right].$$

Ebenso findet man, wenn $\gamma_1'\gamma_2'\gamma_3'$ die Seiten, $\mu_1'\mu_2'\mu_3'$ die Winkel des Dreiecks $P_1'P_2'P_3'$ bezeichnen:

$$\frac{1}{A'^2} = \frac{h_1^2h_2^2h_3^2}{\Delta^2}.\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\left[\frac{l_1^2}{\beta_1^2}\gamma_1'^2 + \frac{l_2^2}{\beta_2^2}\gamma_2'^2 + \frac{l_3^2}{\beta_3^2}\gamma_3'^2\right.$$
$$\left.- 2\frac{l_1l_2}{\beta_1\beta_2}\gamma_1'\gamma_2'\cos\mu_3' - 2\frac{l_2l_3}{\beta_2\beta_3}\gamma_2'\gamma_3'\cos\mu_1' - 2\frac{l_3l_1}{\beta_3\beta_1}\gamma_3'\gamma_1'\cos\mu_2'\right].$$

Man gebe der Gleichung b) die Form

d) $$\frac{1}{D^2B^2}\cdot\frac{1}{A^2} - \frac{1}{D'^2B'^2}\cdot\frac{1}{A'^2} = 0,$$

bezeichne die Coordinaten von T und T' in Bezug auf die Axendreiecke $P_1 P_2 P_3$ bez. $P_1' P_2' P_3'$ mit u_k und u_k', berechne l_k entweder aus

$$r u_k \, (= \xi_k) = \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\varDelta} \cdot D \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_k} \cdot A \cdot l_k,$$

oder aus

$$r' u_k' \, (= \xi_k') = \frac{2 h_1 h_2 h_3}{\varDelta} \cdot D \cdot \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\beta_k} \cdot A' \cdot l_k,$$

und setze der Reihe nach die beiden Werthsysteme in d) ein. Alsdann erhält man zwei homogene Gleichungen zweiter Ordnung in Bezug auf u_k und u_k'. Es ist nun zu beweisen, dass diese beiden Gleichungen je zwei Büschel darstellen.

Es seien $T_4 T_4'$ zwei entsprechende Gerade, deren l_k die Gleichung d) erfüllen. Man kann die l immer so variiren, dass die variirten l der Gleichung d) ebenfalls genügen, und dass die Coefficienten $A_5 A_5'$ der diesen l zugehörigen Geraden $T_5 T_5'$ dieselben Vorzeichen besitzen wie A_4 und A_4'.

Alsdann sind die beiden gleichen spitzen Winkel, welche T_5 und T_5' mit entsprechenden Hälften der congruenten Geraden einschliessen, gleich gelegen wie die spitzen Winkel zwischen den entsprechenden Hälften der congruenten Geraden und den Geraden T_4 und T_4' und es ist ferner in Folge dessen

$$\widehat{T_4 T_5} = \widehat{T_4' T_5'}.$$

Die Gleichungen je zweier entsprechenden Geraden der beiden Büschel $T_4 T_5$ und $T_4' T_5'$ haben die Form:

$$T \equiv m T_4 + n T_5 = 0,$$
$$T' \equiv m T_4' + n T_5' = 0,$$

und es ist

$$l_k = m l_{k4} + n l_{k5}.$$

Berechnet man mit Hülfe dieser Werthe l_k die Coefficienten A und A' und benutzt man die Formel

$$\frac{1}{A_4 A_5} \cos \widehat{T_4 T_5} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{\varDelta^2} \cdot \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \left[\frac{l_{14} l_{15}}{\alpha_1^2} \gamma_1^2 + \frac{l_{24} l_{25}}{\alpha_2^2} \gamma_2^2 + \frac{l_{34} l_{35}}{\alpha_3^2} \gamma_3^2 - \frac{l_{24} l_{25} + l_{15} l_{24}}{\alpha_1 \alpha_2} \gamma_1 \gamma_2 \cos \mu_3 - \frac{l_{24} l_{35} + l_{25} l_{34}}{\alpha_2 \alpha_3} \gamma_2 \gamma_3 \cos \mu_1 - \frac{l_{34} l_{15} + l_{35} l_{14}}{\alpha_3 \alpha_1} \gamma_3 \gamma_1 \cos \mu_2 \right],$$

sowie die entsprechende Formel für $\frac{1}{A_4' A_5'} \cos \widehat{T_4' T_5'}$, so erhält man folgende Beziehungen:

e)
$$\frac{1}{A^2} = \frac{m^2}{A_4^2} + \frac{n^2}{A_5^2} + 2 \cdot \frac{mn}{A_4 A_5} \cos \widehat{T_4 T_5},$$
$$\frac{1}{A'^2} = \frac{m^2}{A_4'^2} + \frac{n^2}{A_5'^2} + 2 \cdot \frac{mn}{A_4' A_5'} \cos \widehat{T_4' T_5'}.$$

Da nun im vorliegenden Falle die beiden Cosinus einander gleich sind, so folgt aus

$$\frac{1}{D^2 B^2 A_4^2} = \frac{1}{D'^2 B'^2 A_4'^2},$$
$$\frac{1}{D^2 B^2 A_5^2} = \frac{1}{D'^2 B'^2 A_5'^2},$$
$$\frac{1}{D^2 B^2 A_4 A_5} \cos \widehat{T_4 T_5} = \frac{1}{D'^2 B'^2 A'_4 A'_5} \cos T_4' T_5'$$

die Gleichung:

$$\frac{1}{D^2 B^2 A^2} = \frac{1}{D'^2 B'^2 A'^2}.$$

Es genügt demnach das ganze Büschel $T_4 T_5$ der Gleichung d).

Durch jeden Punkt der congruenten Geraden gehen ferner ausser je einem von zwei entsprechenden Strahlen dieses Büschels noch zwei und nur zwei Gerade, welche die Gleichung

$$D^2 B^2 A^2 = D'^2 B'^2 A'^2$$

erfüllen.

Denn seien die Gleichungen der beiden congruenten Geraden:

$$M \equiv g_1 c_1 \mathfrak{T}_1 + g_2 c_2 \mathfrak{T}_2 + g_3 c_3 \mathfrak{T}_3 = 0,$$
$$M' \equiv g_1 d_1 \mathfrak{T}_1 + g_2 d_2 \mathfrak{T}_2 + g_3 d_3 \mathfrak{T}_3 = 0,$$

wo

$$g_k \equiv - \beta_1 \beta_2 \beta_3 B \alpha_k + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 B' \beta_k \quad (12\,g),$$

so sind, um der Behauptung zu genügen, m und n so zu bestimmen, dass die Geraden

$$T_6 \equiv m T_4 + n M = 0,$$
$$T_6' \equiv m T_4' + n M' = 0$$

die Gleichung

$$D^2 A_6^2 B^2 = D'^2 A_6'^2 B'^2$$

erfüllen. Nun ist nach e) und den letzten Formeln in Nro. 12

$$\frac{1}{A_6^2} = \frac{m^2}{A_4^2} + n^2 \cdot \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2 \cdot \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \cdot B'^2}{\Delta^2 B^2}$$
$$+ 2 \cdot \frac{m \cdot n}{A_4} \cdot \frac{h_1 h_2 h_3 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdot B'}{\Delta B} \cos T_4 M,$$

$$\frac{1}{A_6'^2} = \frac{m^2}{A_4'^2} + n^2 \cdot \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2 \beta_1^4 \beta_2^4 \beta_3^4 . B^2}{\Delta^2 B'^2}$$
$$- 2 \cdot \frac{m . n}{A_4'} \cdot \frac{h_1 h_2 h_3 \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 . B}{\Delta B'} \cos \widehat{T_4' M'}.$$

Hieraus folgt eine Gleichung von der Form:

$$n^2 + k m n = 0,$$

welche ausser dem selbstverständlichen Resultat $n = 0$ ein und nur ein Paar entsprechende Gerade $T_6\, T_6'$ liefert.

Diese beiden Geraden $T_6\, T_6'$ gehören den beiden oben gefundenen entsprechenden congruenten Büscheln nicht an.

Es lässt sich ferner immer ein solches System der l finden, welches der Gleichung e) ebenfalls genügt, und für welches das Product der zugehörigen Erweiterungscoefficienten $A_7\, A_7'$ dasselbe Vorzeichen hat wie $A_6\, A_6'$. Dann lässt sich wie oben beweisen, dass jede Gerade des Büschels $A_6\, A_7$ bez. $A_6'\, A_7'$ der Gleichung e) genügt.

Durch diese beiden Paare congruenter Büschel ist der Umfang der Gleichung e) erschöpft.

14. Abstände der Centren der congruenten Büschel von den Gegenaxen.

Die Gleichungen zweier entsprechenden Parallelen zu den Gegenaxen sind von der Form

$$T \equiv (m\alpha_1 + n\beta_1)c_1 \mathfrak{T}_1 + (m\alpha_2 + n\beta_2)c_2 \mathfrak{T}_2 + (m\alpha_3 + n\beta_3)c_3 \mathfrak{T}_3 = 0,$$
$$T' \equiv (m\alpha_1 + n\beta_1)d_1 \mathfrak{T}_1' + (m\alpha_2 + n\beta_2)d_2 \mathfrak{T}_2' + (m\alpha_3 + n\beta_3)d_3 \mathfrak{T}_3' = 0.$$

Die Erweiterungscoefficienten derselben sind:

$$A = \frac{B}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 . n} \cdot \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3} \qquad A' = \frac{B'}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 . m} \cdot \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3}.$$

Sollen dieselben einer der beiden Beziehungen genügen:

$$DBA = \pm D'B'A',$$

so folgt:

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{D' B'^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{D B^2 \beta_1 \beta_2 \beta_3}.$$

Man kann wählen:

$$m = \frac{D' B'^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3}, \qquad n = \pm \frac{D B^2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3},$$

und hat demnach:

$$A = \pm \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3 . D B}, \qquad A' = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3 D' B'}.$$

Ein Punkt von G_∞ hat von der ersten Geraden den Abstand

$$p = A \, . \, m \, . \, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \, . \, DD(P_1 P_2 P_3);$$

ein Punkt von G'_∞ hat von T' den Abstand

$$p' = A' \, . \, n \, . \, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \, . \, DD(P_1' P_2' P_3').$$

Mit Hülfe der Werthe für $A \, A' \, m \, n$ findet man das gewünschte Resultat:

$$p = \pm \, 2 \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{D' B'^2}{B},$$

$$p' = \pm \, 2 \cdot \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \cdot \frac{D B^2}{B'}.$$

Vergleicht man diese Resultate mit den Formeln Nro. 12 d) und e), so bestätigt sich, dass die Centren congruenter entsprechender Büschel in dem einen System eben so weit von der Gegenaxe dieses Systems entfernt sind, wie die congruenten entsprechenden Geraden im andern System von der Gegenaxe des letztern.

Die beiden Centren, denen das positive Zeichen zugehört, liegen auf gleichnamigen Seiten der gleichsinnig congruenten Geraden; mithin haben diese beiden Büschel dieselbe Drehrichtung.

Die beiden anderen entsprechenden Centren liegen auf ungleichnamigen Seiten der congruenten Geraden, die beiden Büschel haben also entgegengesetzte Drehrichtung.

Es giebt demnach ein Paar gleichsinnig congruente entsprechende Büschel und ein Paar ungleichsinnig congruente entsprechende Büschel.

Die ersteren beiden entsprechenden Punkte mögen als positive Collineationspunkte, die beiden letzteren als negative Collineationspunkte bezeichnet werden.

Durch Verschiebung zweier auf einander liegenden collinear verwandten Ebenen lassen sich die positiven Collineationspunkte zur Deckung bringen; durch Drehung lässt es sich dann erreichen, dass die durch den nunmehr gemeinschaftlichen Collineationspunkt gezogenen entsprechenden Strahlen mit ihren entsprechenden Hälften auf einander fallen. Alsdann decken sich insbesondere die beiden gleichsinnig congruenten Geraden so, dass die entsprechenden Punkte auf einander liegen, und die beiden Gegenaxen laufen parallel.

Wendet man hingegen die eine Ebene im Raume um, und vereint man dann die negativen Collineationspunkte, so wie die durch dieselben gehenden entsprechenden Strahlen, so decken sich die

entsprechenden Punkte der ungleichsinnig congruenten Geraden und die Gegenaxen gehen ebenfalls parallel.

Zwei collineare Systeme, welche die eben erörterte Lage haben, heissen collinear liegende Systeme.

15. Die Untersuchung über congruente Büschel zweier collinearen Ebenen lässt sich mit Hülfe der Liniencoordinaten wie folgt führen:

Sind $T_5 T_6$, $T_5' T_6'$ zwei Paar entsprechende Strahlen zweier congruenten Büschel, so ist

a) $$\widehat{T_5 T_6} = \widehat{T_5' T_6'}.$$

Sind TT' zwei beliebig entsprechende Strahlen derselben Büschel, so ist die zweite ausreichende und nothwendige Bedingung für die Congruenz der Büschel:

b) $$\sin \widehat{T_5 T} : \sin \widehat{T T_6} = \widehat{T_5' T'} : \sin \widehat{T' T_6'},$$

T und T' werden aus den gegebenen Strahlen mit Hülfe der Formeln abgeleitet:

$$u_k = \frac{m s_5 u_{k5} + n s_6 u_{k6}}{m s_5 + n s_6},$$

$$u_k' = \frac{m t_5 u_{k5}' + n t_6 u_{k6}'}{m t_5 + n t_6}.$$

Da nun

$$\sin \widehat{T_5 T} : \sin \widehat{T T_6} = \frac{m s_5}{r_5} : \frac{n s_6}{r_6},$$

$$\sin \widehat{T_5' T'} : \sin \widehat{T' T_6'} = \frac{m t_5}{r_5'} : \frac{n t_6}{r_6'},$$

wenn rr' die Abstände der betreffenden Geraden vom Fixpunkte angeben, so kann man b) durch folgende Gleichung ersetzen:

c) $$\frac{s_5}{r_5} : \frac{s_6}{r_6} = \frac{t_5}{r_5'} : \frac{t_6}{r_6'}.$$

Für den Winkel $\widehat{T_a T_b}$ zweier Geraden gilt

d) $$\cos \widehat{T_a T_b} = -\frac{r_a r_b}{\Delta^2}\Big[u_{1a} u_{1b} g_1^2 + u_{2a} u_{2b} g_2^2 + u_{3a} u_{3b} g_3^2 - (u_{1a} u_{2b} + u_{2a} u_{1b}) g_1 g_2 \cos \gamma_3 - (u_{2a} u_{3b} + u_{3a} u_{2b}) g_2 g_3 \cos \gamma_1 - (u_{3a} u_{1b} + u_{1a} u_{3b}) g_3 g_1 \cos \gamma_2\Big];$$

für den Abstand vom Fixpunkte hat man die Formel:

$$\text{e)}\quad \frac{\Delta^2}{r_a^2} = u_{1a}^2 g_1^2 + u_{2a}^2 g_2^2 + u_{3a}^2 g_3^2 - 2 u_{1a} u_{2a} g_1 g_2 \cos \gamma_3 - 2 u_{2a} u_{3b} g_2 g_3 \cos \gamma_1 - 2 u_{3a} u_{1b} g_3 g_1 \cos \gamma_2.$$

Setzt man nun

$$u_{k5} = (l_{15} a_1 u_{k1} + l_{25} a_2 u_{k2} + l_{35} a_3 u_{k3}) : s_5,$$
$$u_{k6} = (l_{16} a_1 u_{k1} + l_{26} a_2 u_{k2} + l_{36} a_3 u_{k3}) : s_6$$

in d) und e) ein, so erhält man

$$\text{f)}\quad \cos \widehat{T_5 T_6} = - \frac{r_5 r_6}{s_5 s_6} \Big[l_{15} l_{16} \frac{a_1^2}{r_1^2} + l_{25} l_{26} \frac{a_2^2}{r_2^2} + l_{35} l_{36} \frac{a_3^2}{r_3^2} - (l_{15} l_{26} + l_{25} l_{16}) \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_3 - (l_{25} l_{36} + l_{35} l_{26}) \frac{a_2 a_3}{r_2 r_3} \cos \mu_1 - (l_{35} l_{16} + l_{15} l_{36}) \frac{a_3 a_1}{r_3 r_1} \cos \mu_2 \Big],$$

$$\text{g)}\quad \frac{s_5^2}{r_5^2} = l_{15}^2 \frac{a_1^2}{r_1^2} + l_{25}^2 \frac{a_2^2}{r_2^2} + l_{35}^2 \frac{a_3^2}{r_3^2} - 2 l_{15} l_{25} \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_3 - 2 l_{25} l_{35} \frac{a_2 a_3}{r_2 r_3} \cos \mu_1 - 2 l_{35} l_{15} \frac{a_3 a_1}{r_3 r_1} \cos \mu_2,$$

$$\text{h)}\quad \frac{s_6^2}{r_6^2} = l_{16}^2 \frac{a_1^2}{r_1^2} + \cdots - 2 l_{16} l_{26} \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_3 - \cdots$$

Eben so erhält man:

$$\text{i)}\quad \cos \widehat{T_5 T_6'} = - \frac{r_5' r_6'}{t_5 t_6} \Big[l_{15} l_{16} \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - (l_{15} l_{26} + l_{25} l_{16}) \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_3' + \cdots \Big],$$

$$\text{k)}\quad \frac{t_5^2}{r_5'^2} = l_{15}^2 \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - 2 l_{15} l_{25} \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_3' - \cdots$$

$$\text{l)}\quad \frac{t_6^2}{r_6'^2} = l_{16}^2 \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - 2 l_{16} l_{26} \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_3' - \cdots$$

Bezeichnet man abkürzend die linken Seiten von g) und k) mit $\mathfrak{M}_5$ und $\mathfrak{N}_5$, die von h) und l) mit $\mathfrak{M}_6$ und $\mathfrak{N}_6$, die eingeklammerten Polynome in f) und i) mit P und Q, so lassen sich die Bedingungsgleichungen

$$\cos \widehat{T_5 T_6} = \cos \widehat{T_5' T_6'},$$
$$\frac{s_5}{r_5} : \frac{s_6}{r_6} = \frac{t_5}{r_5} : \frac{t_6}{r_6}$$

ersetzen durch:

$$\text{m)} \qquad \mathfrak{N}_5 P - \mathfrak{M}_5 Q = 0,$$

$$\text{n)} \qquad \mathfrak{N}_5 \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_5 \mathfrak{N}_6 = 0.$$

Denkt man sich T_5 gegeben und T_6 variabel, so liefert n) eine Curve zweiter Classe, m) einen Punkt. Das Gebilde n) wird von T_5 berührt; denn die Gleichung wird erfüllt für $\mathfrak{M}_6 = \mathfrak{M}_5$, $\mathfrak{N}_6 = \mathfrak{N}_5$. Die Gleichung m) ist die des Tangentialpunktes von T_5 an n). Da nun T_6, wenn es mit T_5 das Problem löst, beiden Gleichungen genügt, so folgt: Die Gleichungen m) und n) haben nur die gemeinsame Lösung

$$T_5 = T_6,$$

wenn n) ein Kegelschnitt ist.

Die Gleichungen m) und n) haben hingegen unzählige Lösungen, nämlich sämmtliche Strahlen des Büschels m), wenn die Gleichung n) zwei Punkte darstellt.

Nur der letzte Fall ist für unser Problem werthvoll.

Demnach ist T_5 so zu wählen, dass die Gleichung n) in zwei reelle lineare Factoren zerfällt. Dies tritt ein, wenn die Discriminante von n) verschwindet, d. i. wenn

$$\begin{vmatrix} -\mathfrak{N}_5 \frac{a_1^2}{r_1^2} + \mathfrak{M}_5 \frac{b_1^2}{r_1'^2}, & \mathfrak{N}_5 \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos\mu_3 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos\mu_3', & \mathfrak{N}_5 \frac{a_1 a_3}{r_1 r_3} \cos\mu_2 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_1 b_3}{r_1 r_3} \cos\mu_2' \\ \mathfrak{N}_5 \frac{a_2 a_1}{r_2 r_1} \cos\mu_3 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_2 b_1}{r_2' r_1'} \cos\mu_3', & -\mathfrak{N}_5 \frac{a_2^2}{r_2^2} + \mathfrak{M}_5 \frac{b_2^2}{r_2'^2}, & \mathfrak{N}_5 \frac{a_2 a_3}{r_2 r_3} \cos\mu_1 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_2 b_3}{r_2 r_3} \cos\mu_1' \\ \mathfrak{N}_5 \frac{a_3 a_1}{r_3 r_1} \cos\mu_2 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_3 b_1}{r_3' r_1'} \cos\mu_2', & \mathfrak{N}_5 \frac{a_3 a_2}{r_3 r_2} \cos\mu_1 - \mathfrak{M}_5 \frac{b_3 b_2}{r_3' r_2'} \cos\mu_1', & -\mathfrak{N}_5 \frac{a_3^2}{r_3^2} + \mathfrak{M}_5 \frac{b_3^2}{r_3'^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hierfür abkürzend

$$\text{o)} \qquad a\mathfrak{N}_5^3 - b\mathfrak{N}_5^2 \mathfrak{M}_5 + c\mathfrak{N}_5 \mathfrak{M}_5^2 - d\mathfrak{M}_5^3 = 0,$$

so ist

$$a = \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{r_1^2 r_2^2 r_3^2} \delta, \qquad d = \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{r_1'^2 r_2'^2 r_3'^2} \delta',$$

$$\delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos\mu_3 & \cos\mu_2 \\ \cos\mu_3 & -1 & \cos\mu_1 \\ \cos\mu_2 & \cos\mu_1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \delta' = \begin{vmatrix} -1 & \cos\mu_3' & \cos\mu_2' \\ \cos\mu_3' & -1 & \cos\mu_1' \\ \cos\mu_2' & \cos\mu_1' & -1 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man mit $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ bez. $\gamma_1' \gamma_2' \gamma_3'$ die Seiten der Dreiecke $T_1\, T_2\, T_3$ bez. $T_1'\, T_2'\, T_3'$, so bestehen die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-\gamma_1 + \gamma_2 \cos\mu_3 + \gamma_3 \cos\mu_2 &= 0, & -\gamma_1' + \gamma_2' \cos\mu_3' + \gamma_3' \cos\mu_2' &= 0,\\
\gamma_1 \cos\mu_3 - \gamma_2 + \gamma_3 \cos\mu_1 &= 0, & \gamma_1' \cos\mu_3' - \gamma_2' + \gamma_3' \cos\mu_1' &= 0,\\
\gamma_1 \cos\mu_2 + \gamma_2 \cos\mu_1 - \gamma_3 &= 0, & \gamma_1' \cos\mu_2' + \gamma_2' \cos\mu_1' - \gamma_3' &= 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\delta = \delta' = 0$.

Von der übrig bleibenden Gleichung

$$\mathfrak{N}_5 \mathfrak{M}_5 (b\mathfrak{N}_5 - c\mathfrak{M}_5) = 0$$

sind die Wurzeln

$$\mathfrak{N}_5 = 0, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M}_5 = 0$$

für die Lösung unsers Problems ohne Bedeutung; demnach erübrigt als Bedingung dafür, dass n) zwei Punkte darstellt:

$$\text{p)} \qquad b\mathfrak{N}_5 - c\mathfrak{M}_5 = 0.$$

Da in dieser Gleichung die l_{i5} variabel zu denken sind, da ferner $\mathfrak{M}_5$ und $\mathfrak{N}_5$ dieselben Functionen der l_{i5}, wie die $\mathfrak{M}_6 \mathfrak{N}_6$ in Bezug auf die l_{i6} sind, so hat die Gleichung p) dieselbe wesentliche Gestalt wie n). Insbesondere enthält die Discriminante dieselben Coefficienten $a\,b\,c\,d$, die in o) vorhanden sind, an den Stellen von $\mathfrak{N}_5 \mathfrak{M}_5$ stehen aber bez. $(-c)$ und $(-b)$. Durch diese letzteren Werthe verschwindet p) identisch. Es ergiebt sich demnach: Alle die Geraden T_5, in welchen Centra congruenter entsprechender Büschel gelegen sind, bilden zwei Büschel.

Setzt man aus p) den Werth

$$\mathfrak{M}_5 : \mathfrak{N}_5 = b : c$$

in m) ein, so erhält man:

$$b\,Q - c\,P = 0.$$

Diese Gleichung liefert in Rücksicht auf die Variabeln l_{i6}, dass die Geraden T_6 einen der beiden durch p) dargestellten Punkte enthalten.

Demnach sind die beiden unter p) enthaltenen Büschel der Geraden T_5 die beiden congruenten Büschel.

§. 3.

Specielle Fälle der Collineation.

a. Affinität.

1. Zwei collineare Systeme sind affin, wenn das Verhältniss entsprechender Flächen constant ist.

Für Erfüllung dieser Definition ist ausreichend und nothwendig, dass das Verhältniss differentieller entsprechender Dreiecke constant ist.

Sind F und F' zwei derartige Dreiecke, so ist

$$F : F' = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \cdot \frac{\tau^3}{\sigma^3} \cdot \frac{D}{D'}.$$

Soll dieser Quotient unabhängig von $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ sein, so muss

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3,$$

und es ist

$$F : F' = D : D'.$$

Ferner ist für alle Punkte

$$\tau = \sigma.$$

2. In affinen Systemen entsprechen sich die unendlich fernen Punkte beider Systeme.

Denn die Gleichungen

$$\tau = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = 0$$

werden wegen

$$\tau = \sigma$$

zugleich erfüllt.

Je zwei Parallelen des einen Systems entsprechen demnach zwei Parallelen des andern.

Ferner wird die Bedingungsgleichung (§. 2, 7)

$$\sigma_a \tau_b - \sigma_b \tau_a = 0$$

für die λ zweier Punktpaare $P_a P'_a$ und $P_b P'_b$, wenn die entsprechenden Geraden $P_a P_b$ und $P'_a P'_b$ ähnlich sein sollen, identisch erfüllt. Im engsten Anschluss an den eben bewiesenen Satz ergiebt sich demnach:

In affinen Systemen sind alle entsprechenden Geraden ähnlich.

3. Nach §. 2, 3 ist das Verhältniss der Abstände zweier entsprechender Punkte $P_a P'_a$ von zwei entsprechenden Geraden $T_b T'_b$:

$$\xi_{ba} : \xi'_{ba} = \frac{D}{D'} \cdot \frac{A_b}{A'_b}.$$

Dieser Quotient ist unabhängig von der Lage der Punkte; hieraus folgt (im Anschluss an Nro. 1):

In affinen Systemen ist das Verhältniss der Abstände entsprechender Punkte von zwei entsprechenden festen Geraden constant.

4. Das Verhältniss γ entsprechender Strecken ist wegen der Aehnlichkeit je zweier entsprechenden Geraden nur von der Lage der Geraden abhängig, welche die Strecken enthalten. Es wird aus dem Verhältniss der Flächen und der Höhen entsprechender über den Strecken als Basen construirter Dreiecke gefunden.

Seien $P_4 P_5$ und $P_4' P_5'$ die beiden Strecken, A und A' die Erweiterungscoefficienten der Geraden $P_4 P_5$ und $P_4' P_5'$, sei ferner $P_6 P_6'$ ein beliebiges Paar entsprechender Punkte, $\xi\, \xi'$ ihre Abstände von $P_4 P_5$ bez. $P_4' P_5'$, so ist:

$$P_4 P_5 P_6 : P_4' P_5' P_6' = D : D',$$
$$\xi : \xi' = D A : D' A',$$

folglich ist

$$\gamma = A' : A.$$

5. Entsprechende Gerade haben in affinen Systemen die Gleichungen:

$$T \equiv l_1 \mathfrak{T}_1 + l_2 \mathfrak{T}_2 + l_3 \mathfrak{T}_3 = 0,$$
$$T' \equiv l_1 \mathfrak{T}_1' + l_2 \mathfrak{T}_2' + l_3 \mathfrak{T}_3' = 0.$$

Da die unendlich fernen Geraden sich entsprechen:

$$T_\infty \equiv \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 = 0,$$
$$T'_\infty \equiv \mathfrak{T}_1' + \mathfrak{T}_2' + \mathfrak{T}_3' = 0,$$

so haben demnach entsprechende Parallele $T_1 \parallel T$ und $T_1' \parallel T'$ die Gleichungen:

$$T_1 \equiv (l_1 + k)\mathfrak{T}_1 + (l_2 + k)\mathfrak{T}_2 + (l_3 + k)\mathfrak{T}_3 = 0,$$
$$T_1' \equiv (l_1 + k)\mathfrak{T}_1' + (l_2 + k)\mathfrak{T}_2' + (l_3 + k)\mathfrak{T}_3' = 0.$$

Hieraus folgt

$$A = \pm A_1, \qquad A' = \pm A_1'.$$

Werden demnach die Gleichungen von Geraden in den Formen §. 2, 3 a), oder §. 2, 4 b) geschrieben, so haben in affinen Systemen

parallele Gerade gleiche oder entgegengesetzt gleiche Erweiterungscoefficienten.

Dies ergiebt im Verein mit den Resultaten von Nro. 3 und 4: Die absoluten Werthe der Abstände je zweier entsprechenden Geraden aus zwei entsprechenden Parallelen-Schaaren von zwei festen entsprechenden Punkten haben ein constantes Verhältniss. Oder:

Der Abstand je zweier Parallelen einer Parallelen-Schaar hat zum Abstande der entsprechenden beiden Parallelen aus der entsprechenden Schaar ein constantes Verhältniss.

Ferner:

Der absolute Werth des Aehnlichkeitsexponenten γ ist für alle Geraden einer Schaar und ihrer Entsprechenden constant. Man bemerke dabei, dass zu allen Parallelen-Schaaren dieselbe einzige unendlich ferne Gerade gehört, — und diese Paradoxie wird einzig und ausreichend durch den hypothetischen Charakter der unendlich fernen Geraden aufgeklärt; demselben zufolge hat die unendlich ferne Gerade keine bestimmte Richtung.

Die Bedeutung des Vorzeichens von γ ergiebt sich durch folgende Betrachtung:

Hat das Verhältniss entsprechender Dreiecke dasselbe Zeichen wie das Verhältniss zweier homologen Höhen, so sind die Basen gleichen Sinnes, im Gegenfalle ungleichen Sinnes. Sind A_1 und A_1' die Erweiterungscoefficienten der beiden Geraden T_1 und T_1', welche die Basen enthalten, so sind also in den Fällen

$$A_1 : A_1' \; (= \gamma) \gtrless 0$$

die Geraden T_1 und T_1' gleichen bez. ungleichen Sinnes.

Für zwei andere entsprechende Gerade

$$T_2 \parallel T_1, \qquad T_2' \parallel T_1'$$

ist

$$A_2 : A_2' = + A_1 : A_1',$$

wenn der Fixpunkt von den beiden Streifen $T_2 T_1$ und $T_2' T_1'$ zugleich eingeschlossen oder ausgeschlossen wird; hingegen ist

$$A_2 : A_2' = - A_1 : A_1',$$

wenn der Fixpunkt innerhalb des einen und ausserhalb des andern Streifens liegt.

Versteht man nun unter gleichgerichteten bez. ungleichgerichteten Bewegungen auf zwei Parallelen derselben Ebene solche Bewegungen, welche gleichen bez. ungleichen Sinnes erscheinen, wenn

man die eine Parallele durch Parallelverschiebung mit der andern zur Deckung bringt, so folgt:

Werden die Parallelen der einen Ebene in ein und derselben Richtung durchlaufen, so sind auch die entsprechenden Bewegungen auf den entsprechenden Parallelen der andern Ebene gleichgerichtet.

Der Gleichung

$$A'^2 : A^2 = \gamma^2$$

genügen zwei verschiedene Schaaren von Geraden und ihre Entsprechenden.

Denn diese Gleichung repräsentirt ein Gebilde zweiter Ordnung. Wird sie durch irgend ein Paar entsprechender Geraden $T_1\, T_1'$ befriedigt, so wird ihr auch durch die entsprechenden Parallelen zu T_1 und T_1' genügt; demnach enthält die fragliche Gleichung einen unendlich fernen Punkt.

Seien nun $T_n\, T_n'$ zwei beliebige entsprechende Gerade mit den Erweiterungscoefficienten A_n und A_n', so haben entsprechende Gerade der Büschel $T_1\, T_n$ und $T_1'\, T_n'$ die Gleichungen

$$T \equiv m\,T_1 + n\,T_n = 0,$$
$$T' \equiv m\,T_1' + n\,T_n' = 0,$$

und die Erweiterungscoefficienten A und A' bestimmen sich aus:

$$\frac{1}{A^2} = \frac{m^2}{A_1^2} + \frac{n^2}{A_n^2} + 2\,\frac{mn}{A_1 A_n} \cos \widehat{T_1 T_n},$$
$$\frac{1}{A'^2} = \frac{m^2}{A_1'^2} + \frac{n^2}{A_n'^2} + 2\,\frac{mn}{A_1' A_n'} \cos \widehat{T_1' T_n'}.$$

Damit nun auch T und T' das Verhältniss $\pm\gamma$ besitzen, müssen m und n der Gleichung genügen:

$$\frac{n^2}{\gamma^2 A_n^2} + 2\,\frac{mn}{\gamma^2 A_1 A_n} \cos \widehat{T_1 T_n} = \frac{n^2}{A_1'^2} + 2\,\frac{mn}{A_1' A_n'} \cos \widehat{T_1' T_n'}.$$

Diese Gleichung liefert ausser der selbstverständlichen Wurzel

$$n = 0$$

noch ein und nur ein Verhältniss $n : m$.

Da nun alle Geraden, welche zu den durch $m : n$ definirten Geraden T und T' parallel gehen, ebenfalls das Verhältniss $\pm\gamma$ besitzen, so folgt, dass der Gleichung

$$A'^2 : A^2 = \gamma^2$$

zwei Büschel mit unendlich fernen Centren zugehören.

Zwischen den Resultaten des allgemeinen Falles und den eben gefundenen Ergebnissen besteht kein Widerspruch.

6. Die beiden Paare congruenter Büschel werden hier zu zwei Schaaren, deren Abstände von entsprechenden Punkten positiv oder negativ gleich sind, für welche also

$$DA = \pm D'A'.$$

7. Die Affinität ist durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt.

Denn seien die Coordinaten eines beliebigen vierten Punktes der ersten Ebene

$$x_k = \alpha_1 x_{k1} + \alpha_2 x_{k2} + \alpha_3 x_{k3},$$

so sind die Coordinaten der entsprechenden Punkte wegen $\alpha_i = \beta_i$ bestimmt, nämlich

$$x'_k = \alpha_1 x'_{k1} + \alpha_2 x'_{k2} + \alpha_3 x'_{k3}.$$

b. Aehnlichkeit.

8. Collineare Systeme sind ähnlich, wenn das Verhältniss entsprechender Strecken constant ist.

Aehnliche Systeme bilden einen Specialfall der affinen Systeme; denn die Affinität wird ausreichend dadurch bedingt, dass alle entsprechenden Geraden ähnlich sind; denn hieraus folgt rückwärts $\sigma = \tau$, und hieraus wiederum das constante Verhältniss entsprechender Flächen.

Demnach ist in ähnlichen Systemen

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3.$$

Damit nun das Verhältniss je zweier entsprechenden Strecken constant gleich $\pm \nu$ sei, muss noch überdies unabhängig von den l:

$$A_b'^2 : A_b^2 = \nu^2.$$

Setzt man die Werthe für A_b^2 und $A_b'^2$, so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$\gamma_i'^2 = \nu^2 \gamma_i^2,$$
$$\gamma_i' \gamma_k' \cos \mu_l' = \nu^2 \gamma_i \gamma_k \cos \mu_l,$$

wo für i 1, 2, 3 und für ikl irgend eine Permutation der Nummern 1, 2, 3 zu setzen ist.

Hieraus folgt als ausreichende und nothwendige Bedingung der Aehnlichkeit, dass

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3$$
$$\text{und} \qquad D \backsim D'.$$

c. Congruenz.

9. Collineare Systeme sind congruent, wenn je zwei entsprechende Strecken einander gleich sind.

Dieser Specialfall der Aehnlichkeit wird erreicht, wenn

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3$$
$$\text{und} \quad D \cong D'.$$

Zwei affine, ähnliche, oder congruente Systeme heissen gleichsinnig oder ungleichsinnig affin etc., je nachdem die Dreiecke D und D', mithin je nachdem je jwei entsprechende Dreiecke gleichen Sinnes sind oder nicht.

§. 4.

Doppelelemente auf einander liegender collinearer Systeme.

1. Doppelelemente oder gemeinschaftliche Elemente zweier collinearen Systeme sind alle Punkte oder Geraden, welche mit dem entsprechenden Punkte bez. der entsprechenden Geraden zusammenfallen.

Für die λ von Doppelpunkten gilt damhach das System:

a) $$(\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{k3}) : \sigma$$
$$= (\lambda_1 \beta_1 x'_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x'_{k2} + \lambda_3 \beta_3 x'_{k3}) : \tau,$$

die l von Doppelgeraden bestimmen sich aus:

b) $$(l_1 a_1 u_{k1} + l_2 a_2 u_{k2} + l_3 a_3 u_{k3}) : s$$
$$= (l_1 b_1 u'_{k1} + l_2 b_2 u'_{k2} + l_3 b_3 u'_{k3}) : t.$$

Zur Bestimmung der λ und l sind irgend zwei der drei Gleichungen des Systems a) bez. b) ausreichend; denn sind die λ den ersten beiden Gleichungen a) gemäss bestimmt, so ist

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2';$$

daraus folgt

$$x_3 = x'_3.$$

Aehnliches gilt von den l der Doppelgeraden.

Multiplicirt man die Gleichungen a) mit $\sigma\tau$, die Gleichungen b) mit st, so sind die Producte homogene Gleichungen zweiten Grades der λ und l.

Wählt man zwei aus jedem Systeme, so liefern dieselben vier Systeme von Verhältnissen

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 \quad \text{bez.} \quad l_1 : l_2 : l_3.$$

Zwei dieser Verhältnisssysteme sind immer reell, da das aus

$$\text{c)} \quad \begin{array}{ll} \sigma = 0 \quad \tau = 0, & \text{sowie das aus} \\ \text{bez.} \; s = 0 \quad t = 0 & \end{array}$$

folgende Verhältnisssystem reell ist und den Gleichungen a) bez. b) genügt.

Die den Gleichungen c) entspringenden Systeme der λ und l genügen aber der geometrischen Forderung nicht; denn diesem Systeme der λ gehören die einander entsprechenden unendlich fernen Punkte der Gegenaxen, und dem Systeme der l die beiden durch den Fixpunkt gehenden entsprechenden Geraden zu; weder die beiden erstgenannten Punkte, noch die beiden letztgenannten Geraden fallen im Allgemeinen zusammen.

Jede andere Wurzel der ausgewählten Gleichungen liefert endliche Werthe der x_k und x'_k bez. u_k und u'_k, mithin solche Werthe, die der geometrischen Forderung genügen.

Hieraus folgt:

Zwei auf einander liegende collinear verwandte Ebenen haben einen Punkt und zugleich eine Gerade, oder drei Punkte und drei Gerade gemein, die sich selbst entsprechen.

Die Doppelpunkte sind Träger zweier entsprechenden concentrischen Büschel, die Doppelgeraden sind Träger zweier entsprechenden Punktreihen.

Ist nur ein Doppelpunkt und eine Doppelgerade vorhanden, so haben die beiden entsprechenden concentrischen Büschel keine Doppelstrahlen, die beiden auf einander liegenden Punktreihen keine Doppelpunkte.

2. Sind drei Doppelpunkte vorhanden und bezieht man die Collineationsgleichungen auf das Doppeldreieck, so gewinnen dieselben folgende einfache Gestalt:

Die Coordinaten entsprechender Punkte sind:

$$x_1 = \frac{\lambda_1}{\sigma} \alpha_1 h_1, \quad x_2 = \frac{\lambda_2}{\sigma} \alpha_2 h_2, \quad x_3 = \frac{\lambda_3}{\sigma} \alpha_3 h_3,$$

$$x_1' = \frac{\lambda_1}{\tau} \beta_1 h_1, \quad x_2 = \frac{\lambda_2}{\tau} \beta_2 h_2, \quad x_3 = \frac{\lambda_3}{\tau} \beta_3 h_3.$$

Die Gleichungen entsprechender Geraden werden, da

$$\mathfrak{X}_i = h_{i+1} h_{i+2} x_i, \qquad \mathfrak{X}'_i = h_{i+1} h_{i+2} x_i:$$

$$T \equiv l_1 c_1 h_2 h_3 x_1 + l_2 c_2 h_3 h_1 x_2 + l_3 c_3 h_1 h_2 x_3 = 0,$$
$$T' \equiv l_1 d_1 h_2 h_3 x_1 + l_2 d_2 h_3 h_1 x_2 + l_3 d_3 h_1 h_2 x_3 = 0.$$

Dafür kann man auch schreiben:

$$T \equiv l_1 c_1 x_1 + l_2 c_2 x_2 + l_3 c_3 x_3 = 0, \qquad c_k = \frac{1}{\alpha_k},$$

$$T' \equiv l_1 d_1 x_1 + l_2 d_2 x_2 + l_3 d_3 x_3 = 0, \qquad d_k = \frac{1}{\beta_k}.$$

Die Coordinaten entsprechender Geraden werden zu:

$$u_k = \frac{l_k c_k}{m} h_k, \quad m = l_1 c_1 r_1 + l_2 c_2 r_2 + l_3 c_3 r_3,$$

$$u'_k = \frac{l_k d_k}{n} h_k, \quad n = l_1 d_1 r_1 + l_2 d_2 r_2 + l_3 d_3 r_3.$$

3. Doppelelemente zweier affinen Ebenen.

Die Coordinaten entsprechender Punkte zweier affinen Ebenen werden nach den Formeln abgeleitet:

a)
$$x_k = \frac{\lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2} + \lambda_3 x_{k3}}{\sigma},$$
$$x'_k = \frac{\lambda_1 x'_{k1} + \lambda_2 x'_{k2} + \lambda_3 x'_{k3}}{\sigma},$$
$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Die λ der Doppelpunkte ergeben sich demnach aus zweien von den drei Gleichungen:

b)
$$\frac{\lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2} + \lambda_3 x_{k3}}{\sigma} = \frac{\lambda_1 x'_{k1} + \lambda_2 x'_{k2} + \lambda_3 x'_{k3}}{\sigma}.$$

Diese Gleichungen werden durch $\sigma = 0$ erfüllt; aber nicht alle dieser Gleichung entsprechenden unendlich fernen Punkte sind Doppelpunkte, sondern nur die, für welche zugleich

c)
$$x_k : x_i = x'_k : x'_i.$$

Die drei in dieser Form enthaltenen Proportionen sind für unendlich ferne Punkte erfüllt, wenn eine von ihnen gilt. Setzt man nun z. B. in

$$x_1 : x_2 = x_1' : x_2'$$

oder

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0$$

die Werthe aus a), so folgt für $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ eine homogene quadratische

Gleichung. Die Punkte, deren λ dieser Gleichung genügen, liegen auf einem Kegelschnitt. Ist derselbe eine Ellipse, so giebt es keine unendlich fernen Doppelpunkte; ist er eine Hyperbel oder ein Paar Gerade, so liegen die unendlich fernen Doppelpunkte in den Asymptoten bez. in den beiden Geraden; ist er eine Parabel, so ist ein unendlich ferner Doppelpunkt vorhanden, welcher auf der Parabelaxe liegt. Ist ein unendlich entfernter Doppelpunkt vorhanden, so giebt es zwei gleichgerichtete entsprechende Parallelenschaaren, welche den Doppelpunkt enthalten.

Zur Bestimmung der im Endlichen gelegenen Doppelpunkte erübrigen die drei Gleichungen:

d) $$\lambda_1 x_{k1} + \lambda_2 x_{k2} + \lambda_3 x_{k3} = \lambda_1 x'_{k1} + \lambda_2 x'_{k2} + \lambda_3 x'_{k3}.$$

Diese drei Gleichungen sind nicht unabhängig von einander.

Irgend zwei von ihnen dienen zur Bestimmung des Verhältnisses der λ. Man erhält ein Verhältniss $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, ausser wenn

e) $$\partial_{11} : \partial_{12} : \partial_{13} = \partial_{21} : \partial_{22} : \partial_{23} = \partial_{31} : \partial_{32} : \partial_{33},$$
$$\partial_{ik} \equiv x_{ik} - x'_{ik}.$$

In diesem letzteren Falle resultiren unzählige Werthsysteme der λ; da dieselben einer linearen Gleichung

$$\partial_{i1} \lambda_1 + \partial_{i2} \lambda_2 + \partial_{i3} \lambda_3 = 0$$

genügen, so folgt:

Wenn die Proportionen c) erfüllt sind, so besitzen die affinen Systeme unzählige Doppelpunkte; dieselben erfüllen eine Gerade, es liegen mithin zwei congruente Gerade mit den entsprechenden Punkten auf einander.

Der fernere Ausnahmefall

$$\partial_{ik} = 0, \quad \text{also} \quad x_{ik} = x'_{ik}$$

liegt ausserhalb der gegenwärtigen Betrachtung; dann fallen die Punkte $P_1 P_2 P_3$ auf die Punkte $P_1' P_2' P_3'$; die beiden Systeme sind congruent und liegen mit den entsprechenden Punkten auf einander.

Sind die Proportionen e) nicht erfüllt, so liefern die Gleichungen d) nur ein Wurzelsystem.

Der zugehörige Doppelpunkt ist ebenfalls unendlich fern, wenn die Lösungen des Systems d) zugleich die Gleichung $\sigma = 0$ erfüllen. Da je zwei der Gleichungen d) die dritte herbeiführen, so erhält man als ausreichende und nothwendige Bedingung für die unendlich entfernte Lage aller Doppelpunkte zweier affinen Systeme aus dem Verein der Gleichungen

$$\lambda_1 \partial_{i1} + \lambda_2 \partial_{i2} + \lambda_3 \partial_{i3} = 0,$$
$$\lambda_1 \partial_{k1} + \lambda_2 \partial_{k2} + \lambda_3 \partial_{k3} = 0,$$
$$\lambda_1 \quad + \lambda_2 \quad + \lambda_3 \quad = 0,$$

das Verschwinden der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \partial_{i1} & \partial_{i2} & \partial_{i3} \\ \partial_{k1} & \partial_{k2} & \partial_{k3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

worin $i\,k$ ein Paar der Nummern 1, 2, 3 sind. Diese drei Determinanten verschwinden gleichzeitig.

4. **Affinitätsgleichungen in Bezug auf die Doppelelemente.**

I. Entsprechende Punkte von zwei affinen Systemen mit einem endlichen Doppelpunkte P_3 und zwei Doppelstrahlen $P_3 P_1$ und $P_3 P_2$ mögen durch ihre Abstände von $P_3 P_2$ und $P_3 P_1$ charakterisirt und auf das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ bezogen werden. Sei γ_1 und γ_2 das Verhältniss entsprechender Strecken auf den Doppelgeraden $P_3 P_1$ und $P_3 P_1$, ferner $h_1 h_2$ die von P_1 und P_2 ausgehenden Höhen, so sind die Coordinaten x_1 und x_2 für die Punkte

	P_1	P_2	P_3	P_1'	P_2'	P_3'
$x_1 =$	h_1	0	0	$\gamma_1 h_1$	0	0,
$x_2 =$	0	h_2	0	0	$\gamma_2 h_2$	0.

Mithin ist für zwei entsprechende Punkte

$$x_1 = l_1 h_1, \qquad x_2 = l_2 h_2,$$
$$x_1' = l_1 \gamma_1 h_1, \qquad x_2' = l_2 \gamma_2 h_2,$$

oder kürzer:

a) $$x_1' = \gamma_1 x_1, \qquad x_2' = \gamma_2 x_2.$$

II. **Giebt es keinen endlichen Doppelpunkt beider affinen Systeme**, so gestalten sich die Verwandtschaftsgleichungen am einfachsten, wenn man zwei Paar entsprechender Punkte und die Richtung zweier gleichlaufenden Schaaren voraussetzt. Seien $P_1 P_2 P_1' P_2'$ die gegebenen Punkte, P_∞ der unendliche Doppelpunkt, so bestimme man die Punkte in Bezug auf das Dreieck $P_1 P_2 P_\infty$.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte sind:

	P_1	P_2	P_∞	P_1'	P_2'	P_∞
x_1	h	0	0	h_1	h_2	0,
x_2	0	h	0	$h-h_1$	$h-h_2$	0,
x_3	0	0	H	e_1	e_2	H,

worin h die Breite des Streifens $P_1 P_2 P_\infty$, $h_1 - h_2$ die Breite des

Streifens $P_1' P_2' P_\infty$ und $e_1 e_2$ die Abstände der Punkte $P_1' P_2'$ von $P_1 P_2$ angeben.

Die Coordinaten je zweier entsprechender Punkte sind alsdann

$$x_1 = \lambda_1 h, \quad x_2 = \lambda_2 h, \quad x_3 = \lambda_3 H,$$
$$x_1' = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, \quad x_2' = \lambda_1 (h - h_1) + \lambda_2 (h - h_2),$$
$$x_3' = l_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 H.$$

Mithin ist

$$x_1' = \frac{h_1}{h} x_1 + \frac{h_2}{h} x_2, \quad x_2' = x_2 + x_1 - x_1',$$
$$x_3' = \frac{e_1}{h} x_1 + \frac{e_2}{h} x_2 + x_3.$$

Diese Formeln liefern nur dann endliche Doppelpunkte, wenn, wie man sich leicht überzeugt,

$$(h_1 - h) : h = e_1 : e_2.$$

III. Liegen zwei congruente Gerade mit den entsprechenden Punkten auf einander, so ist die Verwandtschaft durch die congruente Gerade und ein Paar ausser ihr gelegener entsprechende Punkte $P_3 P_3'$ bestimmt.

Man nimmt am einfachsten zwei Punkte $P_1 P_2$ der entsprechenden Geraden und P_3 als Ecken des Coordinatendreiecks. Die Coordinaten der gegebenen Punkte seien:

	$P_1 \equiv P_1'$	$P_2 \equiv P_2'$	P_3	P_3'
x_1	h_1	0	0	e_1
x_2	0	h_2	0	e_2
x_3	0	0	h_3	e_3,

so ist für je zwei entsprechende Punkte:

$$x_1 = \lambda_1 h_1, \quad x_2 = \lambda_2 h_2, \quad x_3 = \lambda_3 h_3,$$
$$x_1' = \lambda_1 h_1 + \lambda_3 e_1, \quad x_2' = \lambda_2 h_2 + \lambda_3 e_2, \quad x_3' = \lambda_3 e_3$$

Oder:

$$x_1' = x_1 + \frac{e_1}{h_3} x_3, \quad x_2' = x_2 + \frac{e_2}{h_3} x_3, \quad x_3' = \frac{e_3}{h_3} x_3.$$

Ist $e_3 = h_3$, so sind alle Parallelen zu $P_1 P_2$ entsprechende Geraden; mithin liegen dann je zwei entsprechende congruente Parallelen auf einander, jedoch sind nur in einer dieser Geraden die entsprechenden Punkte vereint.

Man sieht leicht, dass hier die beiden Systeme collinear liegend sind, wie auch immer das Punktepaar $P_3 P_3'$ gelegen sein mag.

5. Zwei ähnliche Systeme sind affin, aber ohne congruente

Gerade zu besitzen; mithin haben sie höchstens einen endlichen Doppelpunkt.

Congruente Systeme haben entweder einen endlichen Doppelpunkt, oder sie sind collinear liegend; im letzteren Falle sind sie entweder symmetrisch oder identisch.

6. Aus den eben entwickelten Sätzen ergeben sich mit Leichtigkeit die folgenden:

In der Ebene zweier Dreiecke ABC, $A'B'C'$ giebt es immer einen endlichen oder unendlich fernen Punkt P, der so beschaffen ist, dass

$$PAB : PBC : PCA = PA'B' : PB'C' : PC'A'.$$

In der Ebene zweier Strecken AB und $A'B'$ giebt es immer zwei Punkte P und Q, welche so beschaffen, dass die Dreiecke PAB und $PA'B'$ gleichsinnig, die Dreiecke QAB und $QA'B'$ ungleichsinnig ähnlich sind.

In der Ebene zweier gleichlanger Strecken AB und $A'B'$ giebt es immer zwei Punkte P und Q, so dass die Dreiecke PAB und $PA'B'$ gleichsinnig, die Dreiecke QAB und $QA'B'$ ungleichsinnig congruent sind.

§. 5.

Vereinfachte Darstellung der Collineationsgleichungen.

1. Seien $P_1P_2P_3$ und $P_1'P_2'P_3'$ zwei Dreiecke, deren homologe Ecken sich collinear entsprechen, seien ferner die Coordinaten eines vierten Paares entsprechender Punkte P_4P_4' abgeleitet nach

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} \xi_k &= \alpha_k h_k, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \xi_k' &= \beta_k h_k', \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \end{aligned}$$

wobei sich die ξ_k und ξ_k' auf die Dreiecke $P_1P_2P_3$ bez. $P_1'P_2'P_3'$ beziehen, so sind die Coordinaten je zweier entsprechenden Punkte P und P' gegeben durch

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} x_k &= \frac{\lambda_k \alpha_k}{\sigma} h_k, \qquad \sigma = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3, \\ x_k' &= \frac{\lambda_k \beta_k}{\sigma} h_k', \qquad \tau = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3. \end{aligned}$$

2. Die Gleichungen $\sigma = 0$, $\tau = 0$ liefern auch hier die entsprechenden Paare T_∞ und G'_∞ bez. T'_∞ und G_∞; die Gleichungen $m\sigma + n\tau = 0$ liefern zwei entsprechende Parallelen zu den beiden Gegenaxen.

3. Die Gleichungen zweier entsprechenden Geraden $P_5 P_6$ und $P_5' P_6'$ sind:

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{15} & x_{25} & x_{35} \\ x_{16} & x_{26} & x_{36} \end{vmatrix} = 0, \quad T' \equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_{15}' & x_{25}' & x_{35}' \\ x_{16}' & x_{26}' & x_{36}' \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier

$$x_{ki} = \frac{\lambda_{ki}\alpha_k}{\sigma_i} h_k, \qquad x'_{ki} = \frac{\lambda_{ki}\beta_k}{\tau_i} h'_k,$$

so lassen sich die Gleichungen auf die Form bringen:

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} T &\equiv \frac{l_1 g_1}{\alpha_1} x_1 + \frac{l_2 g_2}{\alpha_2} x_2 + \frac{l_3 g_3}{\alpha_3} x_3 = 0, \\ T' &\equiv \frac{l_1 g_1'}{\beta_1} x_1' + \frac{l_2 g_2'}{\beta_2} x_2' + \frac{l_3 g_3'}{\beta_3} x_3' = 0. \end{aligned}$$

Oder in Rücksicht auf a):

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} T_1 &\equiv \frac{l_1}{\xi_1} x_1 + \frac{l_2}{\xi_2} x_2 + \frac{l_3}{\xi_3} x_3 = 0, \\ T_1' &\equiv \frac{l_1}{\xi_1'} x_1' + \frac{l_2}{\xi_2'} x_2' + \frac{l_3}{\xi_3'} x_3' = 0. \end{aligned}$$

Hiernach sind die Gleichungen der Gegenaxen, für welche $l_k = g_k' \xi_k'$ bez. $l_k = g_k \xi_k$:

$$\text{e)} \quad \begin{aligned} G_\infty &\equiv \frac{g_1' \xi_1'}{\xi_1} x_1 + \frac{g_2' \xi_2'}{\xi_2} x_2 + \frac{g_3' \xi_3'}{\xi_3} x_3 = 0, \\ G'_\infty &\equiv \frac{g_1 \xi_1}{\xi_1'} x_1' + \frac{g_2 \xi_2}{\xi_2'} x_2' + \frac{g_3 \xi_3}{\xi_3'} x_3' = 0. \end{aligned}$$

4. Die Flächen zweier entsprechender Dreiecke $P_m P_n P_o$ und $P'_m P'_n P'_o$ sind

$$\text{f)} \quad \begin{aligned} P_m P_n P_o &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 h_1 h_2 h_3}{\sigma_m \sigma_n \sigma_o} L_{mno}, \\ P'_m P'_n P'_o &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 h_1' h_2' h_3'}{\tau_m \tau_n \tau_o} L_{mno}. \end{aligned}$$

Das Flächenverhältniss an zwei entsprechenden Punkten ist demnach unter Rücksicht auf a):

$$\text{g)} \qquad k = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{\xi_1' \xi_2' \xi_3'} \cdot \frac{\tau^3}{\sigma^3}.$$

5. Seien $A\,A'$ die Erweiterungscoefficienten von den Gleichungen der Gegenaxen in der Form e), so sind die Abstände zweier entsprechenden Punkte $P\,P'$ von denselben bez.:

$$p = A \cdot \frac{\Delta' \tau}{\Delta \sigma}, \qquad p' = A' \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta' \tau}.$$

Hiernach ergiebt sich das constante Product:

h) $$pp' = A . A'.$$

Hierin ist

$$A^2 = 1 : \left(\frac{g_1'^2 \xi_1'^2}{\xi_1^2} + \frac{g_2'^2 \xi_2'^2}{\xi_2^2} + \frac{g_3'^2 \xi_3'^2}{\xi_3^2} - 2\frac{g_1' g_2' \xi_1' \xi_2'}{\xi_1 \xi_2} \cos \mu_1 - 2\frac{g_2' g_3' \xi_2' \xi_3'}{\xi_1 \xi_2} \cos \mu_2 - 2\frac{g_3' g_1' \xi_3' \xi_1'}{\xi_3 \xi_1} \cos \mu_3\right),$$

$$A'^2 = 1 : \left(\frac{g_1^2 \xi_1^2}{\xi_1'^2} + \frac{g_2^2 \xi_2^2}{\xi_2'^2} + \frac{g_3^2 \xi_3^2}{\xi_3'^2} - 2\frac{g_1 g_2 \xi_1 \xi_2}{\xi_1' \xi_2'} \cos \nu_1 - 2\frac{g_2 g_3 \xi_2 \xi_3}{\xi_2' \xi_3'} \cos \nu_2 - 2\frac{g_3 g_1 \xi_3 \xi_1}{\xi_3' \xi_1'} \cos \nu_3\right).$$

6. Aus g) und h) folgt das Verhältniss entsprechender Strecken auf zwei ähnlichen Geraden zu:

$$\gamma = k : \frac{dp}{dp'} = -\frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3 . \Delta^2 . A'}{\xi_1' \xi_2' \xi_3' . \Delta'^2 . A} \cdot \frac{\tau}{\sigma}.$$

§. 6.

Involutorische Ebenen.

1. Zwei auf einander liegende collineare Ebenen sind **involutorisch** oder in **Involution**, wenn jedem Punkte des Trägers (d. i. der gemeinsamen Ebene, auf der beide Systeme liegen) ein und derselbe Punkt entspricht, gleichviel ob man ihn als Punkt des einen oder des andern Systems ansieht.

Zwei Punkten $A_1 A_2$ des Trägers entsprechen dieselben zwei Punkte $B_1 B_2$, gleichviel ob man A_1 und A_2 als Punkte des ersten oder zweiten Systems ansieht. Mithin entspricht auch jeder Geraden $(A_1 A_2)$ des Trägers ein und dieselbe Gerade, wenn sie dem ersten oder dem zweiten Systeme zugehört.

Zwei Ebenen sind demnach zugleich für die Punkte und die Geraden in Involution.

2. Dem Punkte P_a des ersten Systems entspreche P_a' des zweiten; dem auf dem Punkte P_a' liegenden Punkte des ersten Systems entspricht nach der Definition der auf P_a liegende Punkt des zweiten Systems. Die Gerade $P_a P_a'$ ist demnach selbstentsprechend. Bei zwei involutorischen Ebenen sind demnach alle Verbindungsgeraden je zweier entsprechender Punkte selbstentsprechend.

Je zwei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte schneiden

sich in einem Doppelpunkte. Jede selbstentsprechende Gerade $P_a P'_a$ hat mit einer andern $P_b P'_b$ einen endlichen oder unendlich fernen Punkt gemein; demnach hat jede selbstentsprechende Gerade involutorischer Systeme zwei Doppelpunkte.

In zwei collinearen Systemen haben entweder alle Gerade lauter Doppelpunkte; dann sind die Systeme congruent und decken sich; — oder eine Gerade hat lauter Doppelpunkte; dann sind sie collinear liegend; — oder keine Gerade hat lauter Doppelpunkte.

Der erste und einfachste Fall der Involution, — der zweier congruenter sich deckenden Ebenen — werde von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen; in den anderen Fällen giebt es Gerade mit zwei Doppelpunkten.

Jede Verbindungsgerade zweier entsprechender Punkte enthält zwei involutorische Punktreihen. Die Doppelpunkte derselben können nicht beide unendlich fern sein.

Seien Π_1 und Π_2 die beiden Doppelpunkte einer selbstentsprechenden Geraden T. Alle übrigen Verbindungsgeraden entsprechender Punkte gehen entweder durch Π_1 oder durch Π_2. Es können nicht durch Π_1 und Π_2 zugleich mehr als zwei dieser Geraden gehen; denn gehen durch Π_1 die Geraden T_1 und T_2, durch Π_2 T_3 und T_4, so sind die Schnittpunkte

von T_1 mit T_3 und T_4,
„ T_2 „ T_3 „ T_4,
„ T_3 „ T_1 „ T_2,
„ T_4 „ T_1 „ T_2

Doppelpunkte, weil sie Doppelgeraden gemeinsam sind. Fügt man hinzu, dass die Geraden T_1 und T_2 ausser den angeführten auch die Doppelpunkte Π_1, die Geraden T_3 T_4 noch den Doppelpunkt Π_2 enthalten, so folgt, dass die vier Geraden T_1 T_2 T_3 T_4 sämmtlich congruente sich deckende Punktreihen enthalten, denn jede von ihnen hat drei Doppelpunkte; dann sind aber alle Punkte der beiden Systeme Doppelpunkte. Es führt daher die obige Annahme auf den bereits ausgeschlossenen Fall zweier sich deckenden Ebenen zurück.

Demnach gehen durch den einen Doppelpunkt von T unendlich viele, durch den andern weniger als zwei selbstentsprechende Gerade. Folglich sind zwei involutorische Systeme collinear liegend; die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte haben den einen Doppelpunkt — das Collineationscentrum — gemeinsam; die anderen Doppelpunkte liegen auf einer Geraden, der Collineationsaxe.

3. Auf gleiche Weise findet man:

Der Durchschnitt je zweier entsprechender Geraden ist Doppelpunkt und Träger zweier concentrischen involutorischen Büschel. Die Verbindungsgerade zweier solcher Centra ist eine Doppelgerade; folglich hat jeder der involutorischen selbstentsprechenden Büschel zwei Doppelstrahlen.

Wenn die Systeme sich nicht decken, so giebt es unzählige Doppelbüschel mit nur zwei Doppelstrahlen; da nun die Centra aller Doppelbüschel in einem der Doppelstrahlen irgend eines dieser Büschel gelegen sind, so folgt, dass der eine Doppelstrahl eines dieser Büschel unzählige Doppelpunkte enthält und Doppelstrahl für alle auf diesen Doppelpunkten liegenden Doppelbüschel ist. Der zweite Doppelstrahl eines jeden der Büschel enthält weniger als zwei — mithin nur und stets einen Doppelpunkt, der allen diesen Doppelstrahlen gemeinsam ist. Also sind die Systeme collinear liegend; der unzähligen (d. i. allen weniger einem) Doppelbüscheln gemeinsame Doppelstrahl ist die Collineationsaxe; die übrigen Doppelstrahlen bilden ein sich deckendes Büschel und schneiden sich im Collineationscentrum.

4. Involutionsformeln für den Fall eines endlichen Collineationscentrum und einer endlich fernen Collineationsaxe.

Die beiden Systeme werden am einfachsten auf ein Doppeldreieck bezogen, dessen Spitze A_1 im Collineationscentrum, dessen andere Ecken auf der Collineationsaxe liegen.

Die allgemeinen Collineationsformeln für den Fall eines selbstentsprechenden Axendreiecks sind:

$$x_k = \frac{\lambda_k \alpha_k}{\sigma} h_k, \qquad x_k' = \frac{\lambda_k \beta_k}{\tau} h_k.$$

Für einen Punkt von $A_2 A_3$ ist:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{\lambda_2 \alpha_2}{\lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3} h_2, \qquad x_3 = \frac{\lambda_3 \alpha_3}{\lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3} h_3;$$

für den entsprechenden:

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = \frac{\lambda_2 \beta_2}{\lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3} h_2, \qquad x_3' = \frac{\lambda_3 \beta_3}{\lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3} h_3.$$

Da nun alle Punkte von $A_2 A_3$ sich selbst entsprechen, so ist:

$$x_2 = x_2', \qquad x_3 = x_3',$$

folglich:

$$\alpha_2 : \beta_2 = \alpha_3 : \beta_3.$$

Setzt man

$$\alpha_3 = \mu\alpha_2, \qquad \beta_3 = \mu\beta_2,$$

so ist

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2(1 + \mu), \qquad \beta_1 = 1 - \beta_2(1 + \mu).$$

Lässt man den Index von α_2 und β_2 weg, so ergeben sich für zwei collinear liegende Systeme in Bezug auf ein Doppeldreieck die Formeln:

a)
$$x_1 = \frac{\lambda_1(1-\alpha-\mu\alpha)}{\sigma}h_1, \quad x_2 = \frac{\lambda_2\alpha}{\sigma}h_2, \quad x_3 = \frac{\lambda_3\mu\alpha}{\sigma}h_3,$$
$$x_1' = \frac{\lambda_1(1-\beta-\mu\beta)}{\tau}h_1, \quad x_2' = \frac{\lambda_2\beta}{\tau}h_2, \quad x_3' = \frac{\lambda_3\mu\beta}{\sigma}h_3.$$

Wird nun ein Punkt ξ_k als Punkt des ersten Systems betrachtet, und sind λ_k seine Ableitungszahlen, so ist nach a)

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \frac{\xi_1}{h_1}\cdot\frac{1}{1-\alpha-\mu\alpha} : \frac{\xi_2}{h_2}\cdot\frac{1}{\alpha} : \frac{\xi_3}{h_3}\cdot\frac{1}{\mu\alpha}.$$

Sind x_k' die Coordinaten des entsprechenden Punktes, so haben dieselben das Verhältniss:

b)
$$x_1' : x_2' : x_3' = \xi_1\,\frac{1-\beta-\mu\beta}{1-\alpha-\mu\alpha} : \xi_2\frac{\beta}{\alpha} : \xi_3\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sieht man dagegen ξ_k als Punkt des zweiten Systems an, so haben seine Ableitungszahlen das Verhältniss:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \frac{\xi_1}{h_1}\cdot\frac{1}{1-\beta-\mu\beta} : \frac{\xi_2}{h_2}\cdot\frac{1}{\beta} : \frac{\xi_3}{h_3}\cdot\frac{1}{\mu\beta}.$$

Das Verhältniss der Coordinaten x_k des entsprechenden Punktes ist demnach:

c)
$$x_1 : x_2 : x_3 = \xi_1\cdot\frac{1-\alpha-\mu\alpha}{1-\beta-\mu\beta} : \xi_2\cdot\frac{\alpha}{\beta} : \xi_3\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

Im Falle der Involution ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3'.$$

Dies tritt ein, wenn

d)
$$\frac{1-\alpha-\mu\alpha}{1-\beta-\mu\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1-\beta-\mu\beta}{1-\alpha-\mu\alpha}.$$

Hieraus folgt entweder

e)
$$\frac{1-\alpha-\mu\alpha}{\alpha} = \frac{1-\beta-\mu\beta}{\beta},$$

oder

f)
$$\frac{1-\alpha-\mu\alpha}{\alpha} = -\frac{1-\beta-\mu\beta}{\beta}.$$

Aus der Gleichung e) folgt

$$\alpha = \beta.$$

In diesem Falle sind die Systeme congruent und decken sich.

Die Gleichung f) ergiebt:

$$\text{g)} \qquad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2(1 + \mu).$$

Man kann daher setzen:

$$\text{h)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} = 1 + \mu + k, \quad \frac{1}{\beta} = 1 + \mu - k, \\ &\alpha = \frac{1}{1 + \mu + k}, \quad \beta = \frac{1}{1 + \mu - k}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich folgende Involutionsformeln:

$$\text{i)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_1}{\sigma} \cdot \frac{k}{1 + \mu + k} \cdot h_1, \quad x_2 = \frac{\lambda_2}{\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \mu + k} h_2, \\ x_3 &= \frac{\lambda_3}{\sigma} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu + k} h_3, \\ x_1' &= -\frac{\lambda_1}{\tau} \cdot \frac{k}{1 + \mu - k} h_1, \quad x_2' = \frac{\lambda_2}{\tau} \cdot \frac{1}{1 + \mu - k} h_2, \\ x_3' &= \frac{\lambda_3}{\tau} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu - k} h_3. \end{aligned}$$

Die Formeln für Geradencoordinaten sind demnach:

$$\text{k)} \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{l_1}{s} \cdot \frac{\mu}{k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_1}{r_1}, \quad u_2 = \frac{l_2}{s} \cdot \frac{k\mu}{k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_2}{r_2}, \\ u_3 &= \frac{l_3}{s} \cdot \frac{k}{k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_3}{r_3}, \\ u_1' &= -\frac{l_1}{t} \cdot \frac{\mu}{-k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_1}{r_1}, \quad u_2' = \frac{l_2}{t} \cdot \frac{k\mu}{-k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_2}{r_2}, \\ u_3' &= \frac{l_3}{t} \cdot \frac{k}{-k + \mu + k\mu} \cdot \frac{h_3}{r_3}. \end{aligned}$$

Denn wenn die Collineationsformeln auf Doppeldreiecke bezogen werden, so ist

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3},$$

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b_3}.$$

Die Gleichungen der beiden Gegenaxen in zwei Systemen mit drei Doppelpunkten sind:

$$G \equiv \frac{\beta_1}{\alpha_1} g_1 x_1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2} g_2 x_2 + \frac{\beta_3}{\alpha_3} g_3 x_3 = 0.$$

$$G' \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1} g_1 x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2} g_2 x_2 + \frac{\alpha_3}{\beta_3} g_3 x_3 = 0.$$

Nach i) ist

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} : \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

Hieraus folgt, was sich auch unmittelbar aus der Definition der Involution ergiebt:

Die Gegenaxen zweier involutorischen Ebenen decken sich. Man beweist leicht die Umkehr dieses Satzes:

Wenn zwei collineare Ebenen collinear liegend sind und die Gegenaxen sich decken, so sind die Ebenen in Involution.

§. 7.

Collinear verwandte Punktebenen im Raume.

1. Sind x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} und x'_{k1}, x'_{k2}, x'_{k3}, sowie

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} x_{k4} &= \alpha_1 x_{k1} + \alpha_2 x_{k2} + \alpha_3 x_{k3}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\ x'_{k4} &= \beta_1 x_{k1} + \beta_2 x_{k2} + \beta_3 x_{k3} \end{aligned}$$

die Coordinaten von vier Paar entsprechenden Punkten zwei collinear verwandter Ebenen in Bezug auf zwei verschiedene Axentetraeder, sind die Coordinaten von je zwei entsprechenden Punkten bestimmt durch

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} x_k &= (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{k3}) : \sigma, \\ x'_k &= (\lambda_1 \beta_1 x'_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x'_{k2} + \lambda_3 \beta_3 x'_{k3}) : \tau. \end{aligned}$$

2. Zwei entsprechende Geraden lassen sich hier am kürzesten durch die lineare homogene Gleichung zwischen den λ ihrer Punkte bestimmen. Insbesondere liefern wie früher die Gleichungen

$$\sigma = 0, \qquad \tau = 0$$

die Geraden T_∞ und G'_∞ bez. G_∞ und T'_∞.

3. Die Ableitungszahlen

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3, \qquad \beta_1\ \beta_2\ \beta_3,$$
$$\frac{\lambda_1 \alpha_1}{\sigma}, \frac{\lambda_2 \alpha_2}{\sigma} \frac{\lambda_3 \alpha_3}{\sigma}, \qquad \frac{\lambda_1 \beta_1}{\tau} \frac{\lambda_2 \beta_2}{\tau} \frac{\lambda_3 \beta_3}{\tau}$$

bleiben unverändert, auf welches Tetraeder man auch die Ebenen beziehen mag.

Wählt man zwei solche Tetraeder, von deren einem drei Ecken auf der Ebene der Punkte x_k, von deren anderm drei Ecken auf der Ebene der Punkte x'_k liegen, bezieht man die Punkte einer jeden Ebene auf das in ihr enthaltene Tetraederdreieck und bezeichnet diese ebenen Coordinaten mit y_k bez. y'_k, so erhält man, wie man sich leicht überzeugt, die Coordinaten $y_k\, y'_k$ aus den y-Coordinaten der Punkte $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ bez. $P_1'\, P_2'\, P_3'\, P_4'$ mit Hülfe derselben Ableitungszahlen wie in a) und b).

Insbesondere ist demnach für zwei affine Ebenen:

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_3 = \beta_3.$$

4. Lehrsatz: Eine Ebene ist mit ihrer Centralprojection auf irgend eine andere Ebene collinear verwandt, und zwar sind je zwei entsprechende Punkte auf demselben Projectionsstrahl enthalten.

Beweis: Die Coordinaten der projicirten Ebene T mögen mit x_k, die der Projectionsebene T' mit x'_k bezeichnet werden; die Coordinaten eines vierten sowie die jedes andern Punktes der Ebene T mögen nach den Formeln Nro. 1 a) und b) aus denen dreier Fundamentalpunkte abgeleitet werden. Die Ebene T werde von ξ_k aus projicirt; die Gleichung der projicirten Ebene sei

$$T' \equiv a x_1' + b x_2' + c x_3' + d x_4' = 0.$$

Die Coordinaten der Projection eines beliebigen Punktes von P werden mit Hülfe der Zahlen m und n abgeleitet nach

$$x'_k = \frac{m \xi_k + n x_k}{m + n},$$

m und n bestimmt man durch Substitution dieser vier Werthe in $T' = 0$; bezeichnet man abkürzend

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + d\xi_4 &\equiv \pi, \\ a x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 &\equiv p, \end{aligned}$$

so ergiebt sich hieraus

$$\text{b)} \qquad m : n = -p : \pi.$$

Folglich ist

$$\text{c)} \qquad x'_k = \frac{-p \xi_k + \pi x_k}{-p + \pi}.$$

Giebt man einem Punkte P und dem zugehörigen Werthe p denselben Index, so ist

$$\text{d)} \qquad p = (\lambda_1 \alpha_1 p_1 + \lambda_2 \alpha_2 p_2 + \lambda_3 \alpha_3 p_3) : \sigma.$$

Substituirt man dies in c) und drückt x_k durch die Fundamental-

punkte aus, so ergiebt sich, wenn Punkt und Projection denselben Index erhalten:

$$\text{e)}\ x'_k = \left(\lambda_1 \alpha_1 (x - p_1) x'_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 (x - p_2) x'_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 (x - p_3) x'_{k3}\right) : (x - p)\sigma.$$

Setzt man $\alpha_i (x - p_i) = \beta_i$, so erlangen diese vier Formeln die Form von x'_k in Nro. 1 b), q. e. d.

5. **Vereint man zwei congruente entsprechende Gerade zweier collinear verwandten Ebenen so, dass die entsprechenden Punkte sich decken, so liegen die beiden Ebenen perspectivisch; d. h. es giebt einen Punkt im Raume, der die Punkte der einen Ebene auf die entsprechenden der andern projicirt.**

Denn dann sind je zwei entsprechende ähnliche Geraden parallel, mithin perspectivisch. Von dem Projectionscentrum zweier ähnlichen Geraden G und G' projicire man die eine T Ebene auf die andere T'. Die Projection ist dann collinear verwandt mit T, mithin auch mit T'. Da nun vier nicht zu dreien in einer Geraden liegende Punkte von T auf die entsprechenden von T' projicirt werden (nämlich irgend zwei Punkte von G auf die entsprechenden von G' und irgend zwei der gemeinsamen congruenten Geraden), so hat die Projection von T mit T' vier Punkte gemein; haben aber zwei collineare auf einander liegende Ebenen vier Paar entsprechende Punkte gemein, so haben sie jedes Paar entsprechende Punkte gemein, sind identisch.

§. 8.

Collinear verwandte Ebenenbündel.

1. Die Ebenen zweier Bündel sind collinear verwandt, wenn jeder Ebene des einen Bündel eine und nur eine des andern, wenn ferner jedem Büschel des einen Bündels ein Büschel des andern entspricht.

Man sieht leicht, dass im Allgemeinen die Collineation zweier Bündel durch vier Paare entsprechende Ebenen bestimmt ist.

2. Sind $T_1\,T_1'$, $T_2\,T_2'$, $T_3\,T_3'$, $T_4\,T_4'$ vier Paare von Ebenen, von welchen $T_1\,T_2\,T_3\,T_4$ und $T_1'\,T_2'\,T_3'\,T_4'$ je ein Bündel bilden; sind ferner die Coordinaten von $T_4\,T_4'$ aus denen der übrigen Ebenen desselben Bündels durch die Formeln abgeleitet:

$$u_{k4} = a_1 u_{k1} + a_2 u_{k2} + a_3 u_{k3},$$
$$u'_{k4} = b_1 u'_{k1} + b_2 u'_{k2} + b_3 u'_{k3},$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = 1, \qquad b_1 + b_2 + b_3 + 1,$$

so erhält man die Coordinaten je zweier entsprechenden Ebenen $T\,T'$ der collinearen Bündel $T_1\,T_2\,T_3\,T_4$ und $T_1'\,T_2'\,T_3'\,T_4'$ durch die Formeln:

$$u_k = (l_1 a_1 u_{k1} + l_2 a_2 u_{k2} + l_3 a_3 u_{k3}) : s,$$
$$u'_k = (l_1 b_1 u'_{k1} + l_2 b_2 u'_{k2} + l_3 b_3 u'_{k3}) : t,$$
$$s = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3, \qquad t = l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3.$$

Hieraus folgt leicht:

Zwei entsprechende Büschel collinearer Bündel sind collinear.

3. Schneidet man zwei collineare Bündel durch je eine Ebene, so sind beide Ebenen collinear verwandt; die entsprechenden Ebenen der Bündel durchdringen die Schnittebenen in entsprechenden Geraden; die Axen entsprechender Büschel durchdringen die Schnittebenen in entsprechenden Punkten. Denn hiernach entspricht jedem Punkte und jeder Geraden der einen Ebene ein Punkt bez. eine Gerade der andern Ebene.

4. Schneidet man zwei collineare Bündel durch eine Ebene, so erhält man durch die Durchdringung entsprechender Ebenen und Büschel zwei auf einander liegende collineare Ebenen. Dieselben besitzen stets einen Doppelpunkt und eine Doppelgerade. Mithin schneiden sich unzählige Paare entsprechender Büschelaxen; und jede Ebene enthält mindestens einen Durchschnitt zweier entsprechenden Ebenen.

Hieraus ergiebt sich: Zwei concentrische Bündel haben stets eine Doppelebene und eine Doppelaxe (ein Paar coaxiale entsprechende Büschel).

5. Congruente Büschel in collinearen Bündeln.

Sind die beiden durch die Ebenenpaare $T_5\,T_6$, $T_5'\,T_6'$ bestimmten Büschel congruent, so ist

a) $$\cos \widehat{T_5 T_6} = \cos \widehat{T_5' T_6'},$$

und jedes Paar entsprechender Ebenen $T_7\,T_7'$ beider Büschel theilt die Winkel $T_5\,T_6$ und $T_5'\,T_6'$ in gleichem Sinusverhältnisse.

Sind nun $T_7\,T_7'$ aus $T_5\,T_6\,T_5'\,T_6'$ abgeleitet durch

$$u_{k7} = \frac{m s_5 u_{k5} + n s_6 u_{k6}}{m s_5 + n s_6},$$
$$u'_{k7} = \frac{m t_5 u'_{k5} + n t_6 u'_{k6}}{m t_5 + n t_6},$$

so ist die Gleichheit der angegebenen Sinusverhältnisse gleichbedeutend mit der Proportion

b) $$\frac{s_5}{r_5} : \frac{s_6}{r_6} = \frac{t_5}{r_5'} : \frac{t_6}{r_6'}.$$

$T_5\, T_6\, T_5'\, T_6'$ seien durch die Formeln abgeleitet:

$$u_{k5} = (l_{15}\, a_1\, u_{k1} + l_{25}\, a_2\, u_{k2} + l_{35}\, a_3\, u_{k3}) : s_5,$$
$$u_{k6} = (l_{16}\, a_1\, u_{k1} + l_{26}\, a_2\, u_{k2} + l_{36}\, a_3\, u_{k3}) : s_6,$$
$$u'_{k5} = (l_{15}\, b_1\, u'_{k1} + l_{25}\, b_2\, u'_{k2} + l_{35}\, a_3\, u'_{k3}) : t_5,$$
$$u'_{k6} = (l_{16}\, b_1\, u'_{k1} + l_{26}\, b_2\, u'_{k2} + l_{36}\, b_3\, u'_{k3}) : t_6.$$

Setzt man dies in die Formeln für den Cosinus des Winkels zweier Ebenen und für den Abstand einer Ebene vom Fixpunkte ein, so erhält man folgende Resultate:

c) $$\cos \widehat{T_5 T_6} = -\frac{r_5 r_6}{s_5 s_6}\Big[l_{15} l_{16} \frac{a_1^2}{r_1^2} + l_{25} l_{26} \frac{a_2^2}{r_2^2} + l_{35} l_{36} \frac{a_3^2}{r_3^2} - (l_{15} l_{26} + l_{25} l_{16}) \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_{12} - (l_{25} l_{36} + l_{35} l_{26}) \frac{a_2 a_3}{r_2 r_3} \cos \mu_{23} - (l_{35} l_{16} + l_{15} l_{36}) \frac{a_3 a_1}{r_3 r_1} \cos \mu_{31}\Big],$$

d) $$\cos \widehat{T_5' T_6'} = -\frac{r_5' r_6'}{t_5 t_6}\Big[l_{15} l_{16} \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - (l_{15} l_{26} + l_{25} l_{16}) \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_{12}' - \cdots\Big],$$

e) $$\frac{s_5^2}{r_5^2} = l_{15}^2 \frac{a_1^2}{r_1^2} + l_{25}^2 \frac{a_2^2}{r_2^2} + l_{35}^2 \frac{a_3^2}{r_3^2} - 2\, l_{15} l_{25} \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_{12} - 2\, l_{25} l_{35} \frac{a_2 a_3}{r_2 r_3} \cos \mu_{23} - 2\, l_{35} l_{15} \frac{a_3 a_1}{r_3 r_1} \cos \mu_{31},$$

f) $$\frac{t_5^2}{r_5'^2} = l_{15}^2 \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - 2\, l_{15} l_{25} \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_{12}' - \cdots,$$

g) $$\frac{s_6^2}{r_6^2} = l_{16}^2 \frac{a_1^2}{r_1^2} + \cdots - 2\, l_{16} l_{26} \frac{a_1 a_2}{r_1 r_2} \cos \mu_{12} - \cdots,$$

h) $$\frac{t_6^2}{r_6'^2} = l_{16}^2 \frac{b_1^2}{r_1'^2} + \cdots - 2\, l_{16} l_{26} \frac{b_1 b_2}{r_1' r_2'} \cos \mu_{12}' - \cdots.$$

Bezeichnet man die linken Seiten von e) und f) mit M_5 und

N_5; die von g) und h) mit M_6 und N_6; den Klammerinhalt auf den rechten Seiten von c) und d) mit P und Q; so lassen sich die Gleichungen a) und b) ersetzen durch

i) $$N_5 P - M_5 Q = 0,$$

k) $$N_5 M_6 - M_5 N_6 = 0.$$

Diese Untersuchung verläuft, wie man sieht, ganz ähnlich mit der über congruente Büschel in collinearen Ebenen. Indem man nun ebenso, wie bei jener Untersuchung, weiter schliesst, gelangt man zu folgenden Ergebnissen:

Denkt man sich $T_5\, T_5'$ gegeben und $T_6\, T_6'$ variabel, so stellt i) zwei entsprechende Büschel dar. Die Gleichung k) liefert zwei entsprechende Gebilde zweiter Ordnung, welche mit den Büscheln i) die Ebenen T_5 bez. T_5' gemein haben; diese Ebenen berühren die Gebilde zweiter Ordnung k) längs der Axen der Büschel i).

Die beiden Gleichungen i) und k) haben nur die eine Lösung (die beiden Gebildpaare nur das eine Paar entsprechender gemeinsamer Tangentialebenen) $T_5\, T_5'$, wenn k) ein Kegel ist. Sie haben hingegen unzählige Lösungen, wenn k) zu zwei Büscheln degenerirt.

Nur dieser letztere Fall ist für unser Problem von Werth.

Soll sich k) in zwei homogene lineare reelle Factoren auflösen, so muss die Discriminante verschwinden. Dieselbe hat die Form:

l) $$a N_5^3 - b N_5^2 M_5 + c N_5 M_5^2 - d M_5^3 = 0.$$

Diese Gleichung liefert drei Wurzelwerthe für das Verhältniss $N_5 : M_5$, von denen stets einer reell ist.

Sei $w : v$ diese reelle Wurzel, so wird also das Problem von allen Ebenen $T_5\, T_5'$ gelöst, deren Coefficienten l die Gleichung erfüllen:

m) $$v N_5 - w M_5 = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Variabeln l_{k5}. Sie ist für dieselben von derselben wesentlichen Gestalt, wie die Gleichung k) in Bezug auf die dortigen Variabeln l_{k6}, nur dass statt der Werthe $N_5\, M_5$, die in k) die Rolle von Constanten haben, in m) die Werthe w und v stehen. Die Discriminante von k) hat demnach dieselbe Form wie die linke Seite der Gleichung l); die Coefficienten derselben sind dieselben Werthe a, b, c, d, — sie enthält aber w an der Stelle von N_5 und v an der Stelle von M_5; sie lautet demnach:

n) $$a w^3 - b w^2 v + c w v^2 - d v^3.$$

Da nun aber $w : v$ eine Wurzel der Gleichung l) ist, so ver-

schwindet diese Discriminante. **Die Gleichung m) repräsentirt demnach für jedes collineare System zwei Büschel.**

Für jede Ebene dieser beiden Büschel ist

$$N_5 : M_5 = w : v.$$

Setzt man dies in die Gleichung l) der congruenten Büschel ein, so erhält man

$$v N_6 - w M_6 = 0.$$

Diese Gleichung ist für variable l_{i6} mit m) identisch. Die beiden Büschelpaare der Ebenen $T_5\, T_5'$ sind demnach selbst die beiden von der einen Wurzel $m : n$ gelieferten congruenten Büschel.

Es ist nun noch über die übrigen beiden Wurzeln der Gleichung l) zu entscheiden.

Gesetzt, dieselben wären ebenfalls reell, so gäbe es sechs Paare entsprechender congruenter Büschel.

Man lege um die Träger der beiden Ebenenbündel zwei gleiche Kugeln. Drei Paare Axen entsprechender congruenter Büschel mögen die eine Kugel in $A\,B\,C$, die andere in $A'\,B'\,C'$ und den Gegenpunkten durchdringen.

Die acht Paar sphärischer Dreiecke mit nicht überstumpfen Seiten und Winkeln, welche durch die Durchschnittspunkte der Axen auf den Kugeln bestimmt sind, lassen sich zu acht Paaren so ordnen, dass in jedem Paare zwei congruente sphärische Dreiecke enthalten sind, deren gleiche Winkel sich entsprechen. $A\,B\,C$ und $A'\,B'\,C'$ seien ein solches Paar. Jedes andere Paar entsprechender Axen wird als Durchschnitt von zwei Paaren, z. B. durch A, B und A', B' gelegte entsprechende Ebenen bestimmt; oder auf den Kugeln wird jedes andere Paar entsprechender Punkte $D\,D'$ als Schnitt zweier Paare entsprechender Hauptkreise bestimmt, die z. B. durch A, B und A', B' gehen. Da nun aber A und A', sowie B und B_1 congruente Büschel enthalten, so folgt die Gleichheit der Winkelpaare:

$$D\widehat{A}B = D'\widehat{A'}B', \quad D\widehat{B}A = D'\widehat{B'}A'.$$

Fügt man hierzu $A\,B = A'\,B'$, so folgt, dass die Dreiecke $D\,A\,B$ und $D'\,A'\,B'$ congruent sind.

Hieraus folgt weiter, dass die beiden Bündel congruent sind.

Da nun dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, so kann die Gleichung l) im Allgemeinen nur **eine** reelle Wurzel haben.

Zwei collineare Ebenenbündel, die nicht congruent sind, haben demnach stets zwei Paar und nur zwei Paar entsprechende congruente Büschel.

6. Man bringe zwei concentrische collineare Bündel durch Drehung des einen in eine solche gegenseitige Lage, dass zwei congruente Büschel coaxial sind und mit den entsprechenden Ebenen auf einander liegen. Sei T eine dieser selbstentsprechenden Ebenen, A die Doppelaxe der sich deckenden Büschel, C das gemeinsame Centrum der beiden Systeme.

Den auf T gelegenen Axen des einen Systems entsprechen die Axen des zweiten, die ebenfalls auf T liegen. Beide Axengruppen bilden zwei concentrische collineare Strahlenbüschel. Da dieselben nun eine Doppelaxe, nämlich A, besitzen, so müssen sie noch eine haben: Dieselbe heisse B.

Demnach enthält jede der Ebenen des Doppelbüschels ausser A noch eine Doppelaxe, und im Allgemeinen nur noch diese eine.

Legt man eine Ebene v durch zwei derselben, so entspricht jeder Axe in v wiederum eine Axe in v; jeder Axe in einer Ebene T des Doppelbüschels entspricht aber ebenfalls eine Axe in derselben Ebene T; mithin sind die Schnitte von v und den Ebenen T die in denselben gelegenen zweiten Doppelaxen.

Bringt man die beiden anderen entsprechenden congruenten Büschel zur Deckung, so ergiebt sich eine zweite Ebene v', in welcher sämmtliche Axen Doppelaxen sind.

Bringt man nun die beiden Systeme wieder in allgemeine Lage, so trennen sich die Doppelaxen von einander und erscheinen nun als zwei Paar entsprechender congruenter ebener Axenbüschel; oder, da von congruenten Ebenen zweier collinearen Ebenenbündel nur insofern die Rede sein kann, als die auf ihnen liegenden beiden Büschel entsprechender Axen congruent sind, so folgt:

Zwei collineare Ebenenbündel haben stets zwei Paar entsprechende congruente Ebenen.

Man beweist ebenso, wie für die congruenten Büschel, dass zwei Ebenenbündel, die nicht congruent sind, nicht mehr als zwei Paar congruente Ebenen enthalten.

Collineare Verwandtschaft von Räumen.

§. 1.

Collineationsformeln.

1. Collineation zweier räumlichen Punktsysteme. Man denke sich jeden Punkt im Raume mehrfach als P_i, P'_k, P''_l etc. Alsdann ist das System der Punkte P_i mit dem der Punkte P'_k einundeindeutig verwandt, wenn jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern Systems entspricht. Seien xyz die Coordinaten eines Punktes P des einen, $x'y'z'$ die des entsprechenden Punktes P' des andern Systems, so wird die einundeindeutige Verwandtschaft im Allgemeinen durch drei Gleichungen der Form ausgedrückt:

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} Mx + Ny + Pz + Q &= 0, \\ M_1 x + N_1 y + P_1 z + Q_1 &= 0, \\ M_2 x + N_2 y + P_2 z + Q_2 &= 0, \end{aligned}$$

worin $M M_1 M_2$, $N N_1 N_2$, $Q Q_1 Q_2$ lineare Functionen von $x' y' z'$ allein sind.

Die einundeindeutige Verwandtschaft wird zur collinearen Verwandtschaft der beiden räumlichen Punktsysteme, wenn die Gleichungen a) so beschaffen sind, dass den Punkten einer Ebene des einen Systems Punkte einer Ebene des andern entsprechen.

Soll zunächst einer Ebene der P eine Ebene der P' entsprechen, so müssen die Lösungen von a) in eine beliebige lineare Function

$$ax + by + cz + d = 0$$

substituirt, eine lineare Function von $x' y' z'$ liefern. Dazu ist ausreichend und nothwendig, dass die Lösungen die Form haben:

$$\text{b)} \qquad x = \frac{N}{M}, \qquad y = \frac{P}{M}, \qquad z = \frac{Q}{M},$$

worin $MNPQ$ lineare Functionen von $x' y' z'$ sind.

Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Falle auch einer Ebene der Punkte P' eine Ebene der P entspricht.

Die Gleichungen b) enthalten fünfzehn unabhängige Constante. Da nun durch jedes Paar entsprechender Punkte drei Gleichungen der Constanten gegeben sind, so folgt:

Die Collineation zweier räumlichen Punktsysteme ist im Allgemeinen durch fünf Paar entsprechende Punkte bestimmt.

Dabei dürfen nicht vier Punkte eines Systems auf derselben Ebene liegen; denn man überzeugt sich leicht, dass der Verein der Gleichungen dann unmöglich ist, wenn die entsprechenden vier Punkte nicht auch auf einer Ebene enthalten sind, und dass die Gleichungen nicht unabhängig sind, wenn die entsprechenden einer Ebene angehören.

2. Man kann nun die Collineationsformeln b) durch jede andere Formelgruppe ersetzen, durch welche die Punkte zweier räumlichen Systeme so verknüpft werden, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern entspricht, dass jeder Ebene von Punkten des einen Systems eine Ebene von Punkten des andern entspricht, und dass fünf Paar entsprechende Punkte beliebig angenommen werden können.

Dies wird durch folgende Formeln geleistet:

Seien die Punkte P und P' auf dasselbe Coordinatentetraeder bezogen; seien $x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, x_{k4}, x_{k5}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Coordinaten von fünf Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ des einen Systems, — x'_{k1}, x'_{k2}, x'_{k3}, x'_{k4} die von fünf Punkten $P_1' P_2' P_3' P_4' P_5'$ des andern Systems; seien ferner $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ so bestimmt, dass

$$x_{k5} = \alpha_1 x_{k1} + \alpha_2 x_{k2} + \alpha_3 x_{k3} + \alpha_4 x_{k4},$$
$$x'_{k5} = \beta_1 x'_{k1} + \beta_2 x'_{k2} + \beta_3 x'_{k3} + \beta_4 x'_{k4},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$$

(was möglich ist und durch von Null verschiedene Werthe erfüllt wird, wenn nicht vier von den fünf Punkten jedes Systems auf einer Ebene liegen); so leite man die Coordinaten je zweier Punkte P und P' durch die zwei Gruppen von je vier Formeln ab:

$$
\text{c)}\quad
\begin{aligned}
x_k &= (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{k3} + \lambda_4 \alpha_4 x_{k4}) : \sigma, \\
x'_k &= (\lambda_1 \beta_1 x_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x_{k2} + \lambda_3 \beta_3 x_{k3} + \lambda_4 \beta_4 x_{k4}) : \tau, \\
\sigma &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 + \lambda_4 \alpha_4, \\
\tau &= \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3 + \lambda_4 \beta_4;
\end{aligned}
$$

dann sind die Systeme der P und der P' collinear verwandt und zwar sind zwei derselben Gruppe der λ zugehörige Punkte P und P' entsprechende Punkte; da fünf Paar willkürliche entsprechende Punkte verwendet sind, so wird durch diese Formeln der allgemeine Fall der collinearen Verwandtschaft dargestellt.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt. Denn nimmt man zwei collineare Systeme an, etwa die Punkte P und P', so kann man aus fünf Paaren entsprechender Punkte die Coefficienten α und β ableiten. Bestimmt man dann die λ für jeden Punkt P, so dass

$$x_k = (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \cdots) : \sigma,$$

und bildet mit Hülfe jeder solchen Gruppe der λ die Coordinaten eines Punktes P'' nach

$$x''_k = (\lambda_1 \beta_1 x_{k1} + \cdots) : \tau,$$

so ist das System P'' mit P collinear verwandt; folglich ist es auch mit dem System der P' collinear verwandt. Da nun die collinear verwandten Systeme $P'' P'$ fünf Paar entsprechende Punkte gemein haben, so haben sie jedes Paar gemein, sind identisch, und es ist

$$x'_k \equiv x''_k = (\lambda_1 \beta_1 x'_{k1} + \cdots) : \tau, \quad \text{q. e. d.}$$

3. Die Punkte je zweier entsprechenden Ebenen zweier collinearen räumlichen Systeme sind collinear verwandt.

Denn benutzt man drei beliebige Punktpaare zweier collinearen Systeme als die Punkte $P_1 P_2 P_3$, $P_1' P_2' P_3'$ zur Aufstellung von Formeln c), so ist für Punkte der Ebenen $P_1 P_2 P_3$ und $P_1' P_2' P_3'$

$$\lambda_4 = 0,$$

mithin werden die Formeln für solche Punkte zu

$$
\begin{aligned}
x_k &= (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{k3}) : \sigma, \\
x_k &= (\lambda_1 \beta_1 x_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x'_{k2} + \lambda_3 \beta_3 x'_{k3}) : \tau,
\end{aligned}
$$

q. e. d.

Die Punkte je zweier entsprechenden Geraden in zwei collinearen räumlichen Systemen sind collinear verwandt.

Denn verwendet man zwei beliebige Punkte $P_1 P_2$ und die entsprechenden $P_1' P_2'$ zur Aufstellung von Formeln c), so ist für

jeden Punkt der Geraden $P_1 P_2$ und für seinen entsprechenden P'

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Hiernach wird für solche Punkte

$$x_k = (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{k2}) : \sigma,$$
$$x'_k = (\lambda_1 \beta_1 x'_{k1} + \lambda_2 \beta_2 x'_{k2}) : \tau.$$

4. Gleichungen entsprechender Ebenen.

Je zwei entsprechende Ebenen können durch eine homogene lineare Gleichung der λ der auf ihnen liegenden Punkte

$$a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 = 0$$

charakterisirt werden.

Denn alle Punkte P, sowie alle Punkte P', deren λ dieser Gleichung genügen, liegen auf je einer Ebene, und die derselben Gruppe der λ zugehörigen beiden Punkte sind entsprechende Punkte.

Die Gleichungen zweier entsprechenden Ebenen bilde man aus den Coordinaten von drei Paar auf ihnen gelegenen entsprechenden Punkten $P_6 P_7 P_8$ und $P_6' P_7' P_8'$:

$$T \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{16} & x_{26} & x_{36} & x_{46} \\ x_{17} & x_{27} & x_{37} & x_{47} \\ x_{18} & x_{28} & x_{38} & x_{48} \end{vmatrix} = 0,$$

$$T' \equiv \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_{16}' & x_{26}' & x_{36}' & x_{46}' \\ x_{17}' & x_{27}' & x_{37}' & x_{47}' \\ x_{18}' & x_{28}' & x_{38}' & x_{48}' \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hierin die Werthe der Coordinaten von $P_6 P_7 P_8$, $P_6' P_7' P_8'$ nach c), und verwendet für P_i und P_i' die Coefficienten $\lambda_{1i}\, \lambda_{2i}\, \lambda_{3i}\, \lambda_{4i}$, so kann man jede der resultirenden beiden Determinanten in eine Summe von 64 Summanden zerlegen.

Die Summanden von T haben die Form:

$$\mu \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{1a} & x_{2a} & x_{3a} & x_{4a} \\ x_{1b} & x_{2b} & x_{3b} & x_{4b} \\ x_{1c} & x_{2c} & x_{3c} & x_{4c} \end{vmatrix},$$

worin

$$\mu = \frac{\alpha_a \alpha_b \alpha_c \lambda_{a6} \lambda_{b7} \lambda_{c8}}{\sigma_6 \sigma_7 \sigma_8}$$

und abc irgend eine Complexion der vier Ziffern 1, 2, 3, 4 bedeutet.

Hiervon verschwinden alle die, in welchen unter abc zwei gleiche Ziffern vorkommen; es verbleiben demnach 24 Summanden.

Hiervon unterscheiden sich viermal sechs nur durch den Factor μ und die Ordnung der Zeilen in der Determinante.

Hebt man diese vier Determinanten sowie die anderen gemeinsamen Factoren aus den Gliedern jeder der vier Gruppen aus, und multiplicirt man beide Seiten der Gleichung der Ebene mit $\sigma_6 \sigma_7 \sigma_8 : \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, so erübrigt die Gleichung der Ebene in der Form

d) $$T \equiv \frac{l_1}{\alpha_1} T_1 + \frac{l_2}{\alpha_2} T_2 + \frac{l_3}{\alpha_3} T_3 + \frac{l_4}{\alpha_4} T_4 = 0,$$

worin

$$T_i \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} & x_{4k} \\ x_{1l} & x_{2l} & x_{3l} & x_{4l} \\ x_{1m} & x_{2m} & x_{3m} & x_{4m} \end{vmatrix}$$

und $iklm$ ist ein Cyklus von 1, 2, 3, 4.

Ebenso erhält man als Gleichung der entsprechenden Ebene:

$$T' \equiv \frac{l_1}{\beta_1} T_1' + \frac{l_2}{\beta_2} T_2' + \frac{l_3}{\beta_3} T_3' + \frac{l_4}{\beta_4} T_4' = 0;$$

hierin sind die l dieselben wie in der Formel für T; ferner bedeutet

$$T_i \equiv \begin{vmatrix} x_1' & \ldots \\ x_{1k}' & \ldots \\ x_{1l}' & \ldots \\ x_{1m}' & \ldots \end{vmatrix}$$

und $iklm$ ist ein Cyklus von 1, 2, 3, 4.

5. Collineation von Ebenen.

Denkt man sich jede Ebene im Raume vielfach, z. B. als $T_i T_k' T_l''$ etc., so ist das System der Ebenen T mit dem der Ebenen T' einundeindeutig verwandt, wenn jeder Ebene eines Systems eine und nur eine des andern entspricht. Die Verwandtschaft wird zur Collineation, wenn überdies den Ebenen jedes Bündels in dem einen System die Ebenen eines Bündels des andern entsprechen.

Bezeichnen uvw, $u'v'w'$ die orthogonalen Coordinaten zweier entsprechenden Ebenen T und T' (in Bezug auf dasselbe oder in

Bezug auf zwei verschiedene Coordinatensysteme), so ist die **nothwendige und ausreichende Bedingung** für die **collineare Verwandtschaft**, dass drei Gleichungen zwischen den Coordinaten von T und T' bestehen, welche die Form zulassen:

$$u = \frac{N}{M}, \quad v = \frac{P}{M}, \quad w = \frac{Q}{M},$$

worin $MNPQ$ lineare Functionen von $u' v' w'$ bezeichnen. Diese Gleichungen enthalten fünfzehn wesentliche Constante; da nun jedes gegebene Paar entsprechender Ebenen drei Bedingungsgleichungen der Constanten liefert, so erfolgt demnach die vollständige Bestimmung der Collineation zweier Systeme von Ebenen im Allgemeinen durch fünf willkürliche Paare entsprechender Ebenen, von denen nicht vier eines Systems denselben Punkt enthalten.

6. Diese Collineationsformeln können durch jedes Formelsystem ersetzt werden, durch welches die Ebenen T und T' einundeindeutig, und so verknüpft werden, dass jedem Bündel des einen Systems ein Bündel im andern entspricht, und zu dessen Bestimmung fünf Paar entsprechende Ebenen beliebig gewählt werden können.

Man wähle fünf Paar Ebenen $T_1\, T_2\, T_3\, T_4\, T_5$ und $T_1'\, T_2'\, T_3'\, T_4'\, T_5'$, so dass weder vier der T, noch vier der T' einen gemeinsamen Punkt haben, und bestimme $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$ so, dass in Bezug auf dasselbe Tetraeder:

$$\text{e)} \quad \begin{aligned} u_{k5} &= a_1 u_{k1} + a_2 u_{k2} + a_3 u_{k3} + a_4 u_{k4}, \\ u'_{k5} &= b_1 u'_{k1} + b_2 u'_{k2} + b_3 u'_{k3} + b_4 u'_{k4}, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1, \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1; \end{aligned}$$

das ist möglich und erfolgt durch von Null verschiedene Werthe der a und b.

Bildet man hierauf die Coordinaten von T und T' nach

$$\text{f)} \quad \begin{aligned} u_k &= (l_1 a_1 u_{k1} + l_2 a_2 u_{k2} + l_3 a_3 u_{k3} + l_4 a_4 u_{k4}) : s, \\ u'_k &= (l_1 b_1 u'_{k1} + l_2 b_2 u'_{k2} + l_3 b_3 u'_{k3} + l_4 b_4 u'_{k4}) : t, \\ s &= l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 + l_4 a_4, \\ t &= l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3 + l_4 b_4, \end{aligned}$$

so sind die Systeme T und T' collinear verwandt, und zwar entsprechen sich je zwei mit demselben System der l gebildete Ebenen.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt: Die Coordinaten entsprechender Ebenen zweier collinearen Systeme lassen sich mit Hülfe der Coordinaten von fünf Paar entsprechenden Ebenen durch Formeln

von der obigen Form ableiten. Der Beweis erfolgt ebenso wie der des analogen Satzes für collineare Punktsysteme, Nro. 2.

7. In collinearen Ebenensystemen sind die entsprechenden Bündel collinear verwandt. In collinearen Ebenensystemen sind die entsprechenden Ebenenbüschel collinear verwandt.

Zum Beweise des ersten Satzes benutze man drei Ebenenpaare der beiden Bündel $T_1\,T_2\,T_3$ und $T_1'\,T_2\,T_3'$ zur Aufstellung von Formeln f). Alsdann ist für jedes Paar entsprechender Ebenen der beiden Bündel $l_4 = 0$, und es bleibt für je zwei solcher Ebenen

$$u_k = (l_1\,a_1\,u'_{k1} + l_2\,a_2\,u_{k2} + l_3\,a_3\,u_{k3}) : s,$$
$$u'_k = (l_1\,b_1\,u'_{k1} + l_2\,b_2\,u'_{k2} + l_3\,b_3\,u'_{k3}) : t,$$

q. e. d.

Für den Beweis des zweiten Satzes benutze man zwei Paar entsprechende Ebenen der beiden Büschel $T_1\,T_2$ und $T_1'\,T_2'$ zur Aufstellung von Formeln f). Für je zwei Ebenen $T\,T'$ der beiden durch $T_1\,T_2$ und $T_1'\,T_2'$ bestimmten Büschel ist alsdann $l_3 = l_4 = 0$ und mithin

$$u_k = (l_1\,a_1\,u_{k1} + l_2\,a_2\,u_{k2}) : s,$$
$$u'_k = (l_1\,b_1\,u_{k1} + l_2\,b_2\,u_{k2}) : t.$$

8. Gleichungen entsprechender Punkte.

Die Gleichungen der durch die drei entsprechenden Ebenenpaare $T_6\,T_7\,T_8$ und $T_6'\,T_7'\,T_8'$ bestimmten Punkte P und P' in Determinantenform sind:

$$P \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_{16} & u_{26} & u_{36} & u_{46} \\ u_{17} & u_{27} & u_{37} & u_{47} \\ u_{18} & u_{28} & u_{38} & u_{48} \end{vmatrix} = 0,$$

$$P' \equiv \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_{16}' & u_{26}' & u_{36}' & u_{46}' \\ u_{17}' & u_{27}' & u_{37}' & u_{47}' \\ u_{18}' & u_{28}' & u_{38}' & u_{48}' \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier für die Coordinaten der gegebenen Ebenen die nach den Formeln f) sich ergebenden Werthe ein, so zerfallen die beiden Determinanten in 64gliedrige Summen; von den Gliedern derselben verschwinden je 40; multiplicirt man die Gleichungen mit

$$\frac{s_6\,s_7\,s_8}{a_1\,a_2\,a_3\,a_4} \quad \text{bez.} \quad \frac{t_6\,t_7\,t_8}{b_1\,b_2\,b_3\,b_4},$$

so erhalten sie schliesslich die Form:

$$\text{g)}\quad \begin{aligned} P &\equiv \frac{\lambda_1}{a_1} P_1 + \frac{\lambda_2}{a_2} P_2 + \frac{\lambda_3}{a_3} P_3 + \frac{\lambda_4}{a_4} P_4 = 0, \\ P' &\equiv \frac{\lambda_1}{b_1} P_1' + \frac{\lambda_2}{b_2} P_2' + \frac{\lambda_3}{b_3} P_3' + \frac{\lambda_4}{b_4} P_4' = 0. \end{aligned}$$

Hierin sind die λ Functionen der l allein, und es bezeichnen:

$$P_i \equiv \begin{vmatrix} u_1 & \cdots \\ u_{1k} & \cdots \\ u_{1l} & \cdots \\ u_{1m} & \cdots \end{vmatrix}, \qquad P_i' \equiv \begin{vmatrix} u_1' & \cdots \\ u_{1k}' & \cdots \\ u_{1l}' & \cdots \\ u_{1m}' & \cdots \end{vmatrix}.$$

i, k, l, m ist ein Cyklus von 1, 2, 3, 4.

9. Bezeichnet man mit $A_i B_i$ die Coefficienten, durch welche bez. $T_i T_i'$ in Nro. 4 d) auf die Normalform gebracht werden, so ergeben die Formeln d) für die Coordinaten entsprechender Ebenen in collinearen Punktsystemen:

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} u_k &= \left(l_1 \cdot \frac{1}{\alpha_1 A_1} u_{k1} + l_2 \cdot \frac{1}{\alpha_2 A_2} u_{k2} + l_3 \cdot \frac{1}{\alpha_3 A_3} u_{k3} + l_4 \cdot \frac{1}{\alpha_4 A_4} u_{k4}\right) : s, \\ u_k' &= \left(l_1 \cdot \frac{1}{\beta_1 B_1} u_{k1}' + l_2 \cdot \frac{1}{\beta_2 B_2} \mu_{k2}' + l_3 \cdot \frac{1}{\beta_3 B_3} u_{k3}' + l_4 \cdot \frac{1}{\beta_4 B_4} u_{k4}'\right) : t, \\ s &= l_1 \frac{1}{\alpha_1 A_1} + \cdots + l_4 \frac{1}{\alpha_4 A_4}, \quad t = l_1 \frac{1}{\beta_1 B_1} + \cdots + l_4 \frac{1}{\beta_4 B_4}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit C_i und D_i die Multiplicatoren, welche P_i und P_i' in Nro. 8 g) auf die Normalform bringen, so ergeben diese Formeln für die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte in collinearen Ebenensystemen:

$$\text{i)}\quad \begin{aligned} x_k &= \left(\lambda_1 \frac{1}{a_1 C_1} x_{k1} + \lambda_2 \frac{1}{a_2 C_2} x_{k2} + \lambda_3 \frac{1}{a_3 C_3} x_{k3} + \lambda_4 \frac{1}{a_4 C_4} x_{k4}\right) : \sigma, \\ x_k' &= \left(\lambda_1 \frac{1}{b_1 D_1} x_{k1}' + \lambda_2 \frac{1}{b_2 D_2} x_{k2}' + \lambda_3 \frac{1}{b_3 D_3} x_{k3}' + \lambda_4 \frac{1}{b_4 D_4} x_{k4}'\right) : \tau, \\ \sigma &= \lambda_1 \frac{1}{a_1 C_1} + \cdots + \lambda_4 \frac{1}{a_4 C_4}, \quad \tau = \lambda_1 \frac{1}{b_1 D_1} + \cdots + \lambda_4 \frac{1}{b_4 D_4}. \end{aligned}$$

Die Formeln h) und i) lehren:

Zwei räumliche Systeme sind immer gleichzeitig in Bezug auf die Punkte und Ebenen collinear verwandt; die entsprechenden Punkte erscheinen als Träger von Bündeln entsprechender Ebenen, die entsprechenden Ebenen erscheinen als Träger entsprechender Punkte.

§. 2.

Sätze über collinear verwandte räumliche Systeme.

1. Gegenebenen. Die Gleichung $\sigma = 0$ liefert für das erste System die unendlich fernen Punkte, für das zweite die Punkte einer im Allgemeinen nicht unendlich fernen Ebene G'_∞; die Gleichung $\tau = 0$ liefert die unendlich fernen Punkte des zweiten Systems und für das erste System eine im Allgemeinen im Endlichen gelegene Ebene G_∞. Diese beiden Ebenen G_∞ und G'_∞ können also als diejenigen Ebenen betrachtet werden, welche der unendlich fernen Ebene entsprechen, je nachdem man dieselbe als Ebene des zweiten oder des ersten Systems betrachtet.

Bezeichnet man die unendlich ferne Ebene mit T_∞ oder T'_∞, je nachdem sie im ersten oder zweiten System betrachtet wird, so erhalten ihre Gleichungen die Form:

$$T_\infty \equiv T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = 0,$$
$$T'_\infty \equiv T_1' - T_2' + T_3' - T_4' = 0.$$

Hieraus folgen die Gleichungen der Gegenebenen zu

$$G_\infty \equiv \frac{\beta_1}{\alpha_1} T_1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} T_2 + \frac{\beta_3}{\alpha_3} T_3 - \frac{\beta_4}{\alpha_4} T_4 = 0,$$

$$G'_\infty \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1} T_1' - \frac{\alpha_2}{\beta_2} T_2' + \frac{\alpha_3}{\beta_3} T_3' - \frac{\alpha_4}{\beta_4} T_4' = 0.$$

2. Die Gleichungen der mit T_k parallelen Ebenen haben die Form:

$$T \equiv \mu T_k + T_\infty = 0$$
$$\equiv \frac{\mu l_{1k} + \alpha_1}{\alpha_1} T_1 + \frac{\mu l_{2k} + \alpha_2}{\alpha_2} T_2 + \frac{\mu l_{3k} + \alpha_3}{\alpha_3} T_3 + \frac{\mu l_{4k} + \alpha_4}{\alpha_4} T_4 = 0.$$

Hieraus folgt für die entsprechende Ebene:

$$T' \equiv \frac{\mu l_{1k} + \alpha_1}{\beta_1} T_1' + \frac{\mu l_{2k} + \alpha_2}{\beta_2} T_2' + \frac{\mu l_{3k} + \alpha_3}{\beta_3} T_3' + \frac{\mu l_{4k} + \alpha_4}{\beta_4} T_4' = 0$$
$$\equiv \mu T_k' + G'_\infty.$$

Ebenso findet man, dass die entsprechende Ebene von

$$T' \equiv \nu T_k' + T'_\infty = 0$$

die Gleichung hat

$$T \equiv \nu T_k + G'_\infty = 0.$$

Hieraus folgt:

Einer Schaar paralleler Ebenen des einen Systems

entspricht ein Ebenenbüschel des andern Systems, dessen Axe auf der Gegenebene dieses Systems gelegen ist.

Die Ebenen

$$T \equiv \mu G_\infty + T_\infty = 0,$$
$$T' \equiv \mu T'_x + G'_\infty = 0$$

entsprechen sich nach Nro. 2. Den Ebenen, welche der Gegenebene des einen Systems parallel sind, entsprechen Parallelebenen zur Gegenebene des andern Systems.

Alle Ebenen, welche der Kante $T_i T_k$ parallel sind, haben Gleichungen von der Form

$$T \equiv \mu T_i + \nu T_k + T_\infty = 0$$
$$\equiv \frac{\mu l_{1i} + \nu l_{1k} + \alpha_1}{\alpha_1} T_1 + \cdots + \frac{\mu l_{4i} + \nu l_{4k} + \alpha_4}{\alpha_4} T_4 = 0.$$

Die entsprechende Ebene ist

$$T' \equiv \frac{\mu l_{1i} + \nu l_{1k} + \alpha_1}{\beta_1} T_1' + \cdots + \frac{\mu l_{4i} + \nu l_{4k} + \alpha_4}{\beta_4} T_4 = 0$$
$$\equiv \mu T'_i + \nu T'_k + G'_\infty = 0.$$

Ebenso ergiebt sich, dass die Ebenen, deren Gleichungen sind

$$T' \equiv \mu T'_i + \nu T'_k + T'_\infty = 0,$$

zu entsprechenden Ebenen haben:

$$T \equiv \mu T_i + \nu T_k + G_\infty = 0.$$

Hieraus folgt: Den Ebenen eines Systems, welche einer Geraden parallel sind, entspricht im andern System ein Bündel, dessen Centrum auf der Gegenebene dieses Systems liegt.

3. Inhalt zweier entsprechenden Tetraeder.

Die Determinante des Tetraeders $P_m P_n P_o P_p$ zerfällt, wenn man für die Coordinaten die Formeln c) benutzt, in das Product zweier Determinanten. Die eine ist die Determinante des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$, die andere ist das Product

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{\sigma_m \sigma_n \sigma_o \sigma_p} L_{mnop},$$

wenn

$$L_{mnop} = \begin{vmatrix} \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \lambda_{3m} & \lambda_{4m} \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \lambda_{3n} & \lambda_{4n} \\ \lambda_{1o} & \lambda_{2o} & \lambda_{3o} & \lambda_{4o} \\ \lambda_{1p} & \lambda_{2p} & \lambda_{3p} & \lambda_{4p} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet v den Inhalt, $h_1 h_2 h_3 h_4$ die Höhen des Axentetraeders, V das Volumen von $P_1 P_2 P_3 P_4$, so folgt:

$$P_m P_n P_o P_p = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{\sigma_m \sigma_n \sigma_o \sigma_p} \cdot L_{mnop} \cdot V.$$

Der Inhalt des entsprechenden Tetraeders wird gefunden zu

$$P'_m P'_n P'_o P'_p = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}{\tau_m \tau_n \tau_o \tau_p} \cdot L_{mnop} \cdot V',$$

wenn V' den Inhalt von $P_1' P_2' P_3' P_4'$ bezeichnet.

4. **Abstand zweier entsprechenden Punkte von zwei entsprechenden Ebenen.**

Seien die Punkte $P_a P'_a$ gegeben durch

$$x_{ka} = (\lambda_{1a} \alpha_1 x_{k1} + \lambda_{2a} \alpha_2 x_{k2} + \lambda_{3a} \alpha_3 x_{k3} + \lambda_{4a} \alpha_4 x_{k4}) : \sigma,$$
$$x'_{ka} = (\lambda_{1a} \beta_1 x'_{k1} + \lambda_{2a} \beta_2 x'_{k2} + \lambda_{3a} \beta_3 x'_{k3} + \lambda_{4a} \beta_4 x'_{k4}) : \tau$$

und die Ebenen $T_b T'_b$:

$$T_b \equiv \frac{l_{1b}}{\alpha_1} T_1 + \frac{l_{2b}}{\alpha_2} T_2 + \frac{l_{3b}}{\alpha_3} T_3 + \frac{l_{4b}}{\alpha_4} T_4 = 0,$$
$$T'_b \equiv \frac{l_{1b}}{\beta_1} T_1' + \frac{l_{2b}}{\beta_2} T_2' + \frac{l_{3b}}{\beta_3} T_3' + \frac{l_{4b}}{\beta_4} T_4' = 0.$$

Bezeichnet man mit ξ_{ab} den Abstand $P_a T_b$, mit ξ'_{ab} den Abstand $P'_a T'_b$, mit A_b und A'_b die Multiplicatoren, welche T_b und T'_b auf die Normalform bringen, so erhält man ξ_{ab} und ξ'_{ab} durch Substitution von x_{ka} und x'_{ka} in $A_b T_b$ bez. $A'_b T'_b$. T_i bez. T'_i gehen durch diese Substitution in eine Summe von vier Determinanten über, von denen drei identisch verschwinden, während die vierte liefert:

$$(-1)^{i-1} \cdot \frac{\alpha_i \lambda_{ia}}{\sigma_a} \cdot \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v} \cdot V,$$
$$\text{bez.} \quad (-1)^{i-1} \cdot \frac{\beta_i \lambda_{ia}}{\tau_a} \cdot \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v} \cdot V'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\xi_{ab} = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V}{v} \cdot A_b \frac{1}{\sigma_a} (\lambda_{1a} l_{1b} - \lambda_{2a} l_{2b} + \lambda_{3a} l_{3b} - \lambda_{4a} l_{4b}),$$
$$\xi'_{ab} = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V'}{v} \cdot A'_b \frac{1}{\tau_a} (\lambda_{1a} l_{1b} - \lambda_{2a} l_{2b} + \lambda_{3a} l_{3b} - \lambda_{4a} l_{4b}).$$

5. Man wähle sechs Punktepaare $P_a P_b P_c P_d P_e P_f$ und ihre entsprechenden und bilde die Volumverhältnisse

$$\frac{V_{abce}}{V_{abde}}, \quad \frac{V_{abef}}{V_{abdf}}, \quad \frac{V'_{abce}}{V'_{abde}}, \quad \frac{V'_{abcf}}{V'_{abdf}},$$

$$\text{wobei } V_{mnop} \equiv P_m P_n P_o P_p,$$

so erhält man:

$$\frac{V_{abce}}{V_{abde}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_c} \cdot \frac{L_{abce}}{L_{abde}}, \qquad \frac{V'_{abce}}{V'_{abde}} = \frac{\tau_d}{\tau_c} \cdot \frac{L_{abce}}{L_{abde}},$$

$$\frac{V_{abcf}}{V_{abdf}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_c} \cdot \frac{L_{abcf}}{L_{abdf}}, \qquad \frac{V'_{abcf}}{V'_{abdf}} = \frac{\tau_d}{\tau_c} \cdot \frac{L_{abcf}}{L_{abdf}}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{V_{abce}}{V_{abde}} : \frac{V_{abcf}}{V_{abdf}} = \frac{V'_{abce}}{V'_{abde}} : \frac{V'_{abcf}}{V'_{abdf}}.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $\frac{V_{abce}}{V_{abde}} : \frac{V_{abcf}}{V_{abdf}}$ als „Räumliches Doppelverhältniss der sechs Punkte $P_a P_b P_c P_d P_e P_f$“, so folgt hieraus der Satz:

In collinearen Systemen ist das Doppelverhältniss von sechs Punkten des einen Systems gleich dem Doppelverhältniss der entsprechenden Punkte des andern Systems.

6. Man wähle zwei Punktepaare $P_6 P_7$ und $P_6' P_7'$, sowie zwei Ebenenpaare $T_a T_b$, $T_a' T_b'$, so ergiebt sich:

$$\frac{\xi_{6a}}{\xi_{6b}} = \frac{A_a}{A_b} \cdot \frac{\lambda_{16} l_{1a} - \cdots + \lambda_{46} l_{4a}}{\lambda_{16} l_{1b} - \cdots + \lambda_{46} l_{1b}},$$

$$\frac{\xi_{7a}}{\xi_{7b}} = \frac{A_a}{A_b} \cdot \frac{\lambda_{17} l_{1a} - \cdots + \lambda_{47} l_{4a}}{\lambda_{17} l_{1b} - \cdots + \lambda_{47} l_{4b}},$$

$$\frac{\xi'_{6a}}{\xi'_{6b}} = \frac{A'_a}{A'_b} \cdot \frac{\lambda_{16} l_{1a} - \cdots + \lambda_{46} l_{4a}}{\lambda_{16} l_{1b} - \cdots + \lambda_{46} l_{4b}},$$

$$\frac{\xi'_{7a}}{\xi'_{7b}} = \frac{A'_a}{A'_b} \cdot \frac{\lambda_{17} l_{1a} - \cdots + \lambda_{47} l_{4a}}{\lambda_{17} l_{1b} - \cdots + \lambda_{47} l_{4b}}.$$

Aus diesen Verhältnissen ergiebt sich der Satz:

$$\frac{\xi_{6a}}{\xi_{6b}} : \frac{\xi_{7a}}{\xi_{7b}} = \frac{\xi'_{6a}}{\xi'_{6b}} : \frac{\xi'_{7a}}{\xi'_{7b}}.$$

Derselbe steht, wie man leicht sieht, in einem einfachen geometrischen Zusammenhange mit dem vorhergehenden.

7. Durch einen der beiden vorhergehenden Sätze lässt sich die räumliche Collineation geometrisch definiren.

Zwei räumliche Punktsysteme sind collinear verwandt, wenn je zwei entsprechende Punkte P_a und P_a' die drei Gleichungen räumlicher Doppelverhältnisse erfüllen:

$$\frac{V_{123a}}{V_{124a}} : \frac{V_{1235}}{V_{1245}} = \frac{V'_{123a}}{V'_{124a}} : \frac{V'_{1235}}{V'_{1245}},$$
$$\frac{V_{231a}}{V_{234a}} : \frac{V_{2315}}{V_{2345}} = \frac{V'_{231a}}{V'_{234a}} : \frac{V'_{2315}}{V'_{2345}},$$
$$\frac{V_{341a}}{V_{342a}} : \frac{V_{3415}}{V_{3425}} = \frac{V'_{341a}}{V'_{342a}} : \frac{V'_{3415}}{V'_{3425}},$$

wobei weder von den Punkten $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ noch von $P_1' P_2' P_3' P_4' P_5'$ vier auf derselben Ebene liegen. Denn der Ort für alle Punkte des zweiten Systems, welche eine dieser Gleichungen für einen gegebenen Punkt P_a des ersten erfüllen, ist eine Ebene, die bez. durch die Kanten $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_4$ geht und durch Grösse und Zeichen des Volumdoppelverhältnisses eindeutig bestimmt ist; P_a' ist mithin als gemeinsamer Punkt dreier Ebenen eindeutig bestimmt. Ebenso beweist man, dass zu einem gegebenen Punkte P_a' durch die drei Gleichungen ein und nur ein entsprechender Punkt P_a bestimmt wird. Mithin sind die beiden Punktsysteme einundeindeutig verwandt.

Insbesondere sind $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$, $P_4 P_4'$, $P_5 P_5'$ Paare entsprechender Punkte.

Nun construire man ein System von Punkten P'', welches mit dem der P collinear ist und in welchem die Punkte $P_1' P_2' P_3' P_4' P_5'$ als Punkte des Systems der P'' gedacht, den gleichbezifferten P entsprechen. Dann erfüllt nach Nro. 5 der dem Punkte P_a entsprechende P_a'' die drei obigen Doppelverhältnissgleichungen. Mithin fallen die demselben Punkte P_a entsprechenden Punkte P_a' und P_a'' zusammen, das System der P' ist identisch mit dem der P''; also ist auch das der P' collinear zu dem der P, q. e. d.

8. Lehrsatz: Der geometrische Ort für die Paare entsprechender Punkte, welche mit den Ecken zweier entsprechenden Dreiecke Tetraeder von constantem Volumverhältniss bilden, sind zwei entsprechende Ebenen parallel zu den Gegenebenen.

Beweis: Seien $P_x P_x'$ zwei entsprechende Punkte, welche mit drei Paaren gegebener fester Punkte $P_a P_b P_c$, $P_a' P_b' P_c'$ zwei Tetraeder vom Verhältniss μ bilden, so ist nach (3):

$$\frac{V_{abcx}}{V'_{abcx}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 . V . \tau_a \tau_b \tau_c \tau_x}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 . V' . \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_x} = \mu.$$

Hieraus ergiebt sich für τ_x und σ_x eine Gleichung der Form

$$m \sigma_x + n \tau_x = 0.$$

Jede der beiden Ebenen geht durch die Kanten der beiden Ebenen des Systems, für deren Punkte $\sigma = 0$ bez. $\tau = 0$, d. i. durch die Kante der Gegenebene und der unendlich fernen Ebene des Systems; es gehen mithin die beiden Ebenen mit G_∞ bez. G'_∞ parallel.

Lehrsatz: Der geometrische Ort für die Paare entsprechender Punkte, deren Abstände von zwei festen entsprechenden Ebenen ein constantes Verhältniss haben, sind zwei entsprechende Ebenen parallel mit den Gegenebenen.

Beweis: Seien $P_x P'_x$ zwei Punkte, deren Entfernungen von den festen Ebenen $T_b T'_b$ das gegebene Verhältniss μ haben, so ist nach Nro. 4

$$\frac{\xi_{xb}}{\xi'_{xb}} = \frac{A_b}{A'_b} \cdot \frac{V}{V'} \cdot \frac{\tau_x}{\sigma_x} = \mu.$$

Hieraus folgt für τ_x und σ_x eine Gleichung von der Form

$$m\sigma_x + n\tau_x = 0,$$

q. e. d.

Der letzte Satz ist mit dem vorhergehenden geometrisch gleichbedeutend.

9. Nach (4) erhält man für die Strecken pp', von welchen zwei entsprechende Punkte PP' von den Gegenebenen G_∞ bez. G'_∞ entfernt sind:

$$p = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V . A}{v} \cdot \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha},$$

$$p' = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V' . A'}{v} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\tau_\alpha},$$

wenn A und A' die Multiplicatoren der Gleichung der Gegenebenen in der in (1) gegebenen Form sind. Durch Multiplication dieser beiden Abstände ergiebt sich:

$$pp' = \left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v}\right)^2 \cdot V . V' . A . A'.$$

Hieraus folgt:

Das Product der Abstände zweier entsprechenden Punkte von der Gegenebene des betreffenden Systems ist constant.

10. Für zwei verschwindend kleine Tetraeder w und w' an den entsprechenden Punkten P und P' sind die σ bez. die τ der Eckpunkte gleich; das Verhältniss derselben geht dadurch über in

$$\frac{w}{w'} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 V}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 V'} \cdot \frac{\tau^4}{\sigma^4}.$$

Das Verhältniss der Volumina verschwindend kleiner entsprechender Tetraeder ist demnach nur von der Lage des Punktepaares abhängig, an welchem sich die Tetraeder befinden, nicht von der Gestalt oder Kantenrichtung derselben.

Das Vorzeichen dieses Verhältnisses ist für alle Paare entsprechender Punkte unveränderlich.

11. Lehrsatz: **Der geometrische Ort für alle Punkte, für welche das Verhältniss der anliegenden differentiellen Tetraeder eine gegebene Grösse hat, sind zwei Paar entsprechende Ebenen symmetrisch und parallel zu den Gegenebenen.**

Beweis. Die Voraussetzung $w : w' = k$, $k \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} \cdot \frac{v}{v'} > 0$ liefert eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\sigma^4}{\tau^4} = m.$$

Bezeichnet m' die positive reelle biquadratische Wurzel aus m, so liefert diese Gleichung die beiden reellen Wurzeln:

$$\sigma - m'\tau = 0, \qquad \sigma + m'\tau = 0.$$

Jede dieser Gleichungen liefert ein Paar entsprechende Parallelen zu den Gegenebenen.

Um zu beweisen, dass die demselben Systeme angehörigen Ebenen der beiden Paare symmetrisch zu der Gegenebene dieses Systems liegen, bemerke man Folgendes:

Die beiden entsprechenden Ebenen, deren λ Gleichung

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 + d\lambda_4 = 0$$

erfüllen, haben, wie man leicht sieht, die Gleichungen

$$T \equiv \begin{vmatrix} \frac{a}{\alpha_1} & \frac{b}{\alpha_2} & \frac{c}{\alpha_3} & \frac{d}{\alpha_4} & 0 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_3 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$T' \equiv \begin{vmatrix} \frac{a}{\beta_1} & \frac{b}{\beta_2} & \frac{c}{\beta_3} & \frac{d}{\beta_4} & 0 \\ x_{11}' & x_{12}' & x_{13}' & x_{14}' & x_1' \\ x_{21}' & x_{22}' & x_{23}' & x_{24}' & x_2' \\ x_{31}' & x_{32}' & x_{33}' & x_{34}' & x_3' \\ x_{41}' & x_{42}' & x_{43}' & x_{44}' & x_4' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen werden mit den in §. 1, 4 gegebenen identisch, wenn man setzt

$$a = l_1, \quad b = l_2, \quad c = l_3, \quad d = l_4.$$

Demnach haben die zu $\sigma - m'\tau = 0$ gehörenden Ebenen die Gleichungen

$$T \equiv T_\infty - m' G_\infty = 0, \text{ bez. } T' \equiv G'_\infty - m' T'_\infty = 0;$$

die zu $\sigma + m'\tau = 0$ gehörenden:

$$T_1 \equiv T_\infty + m' G_\infty = 0, \text{ bez. } T_1' \equiv G'_\infty + m' T'_\infty = 0.$$

Sind A und A' die Multiplicatoren, welche G_∞ und G'_∞ auf die Normalform bringen, so sind die Gleichungen der Ebenen $T T'$ $T_1 T_1'$ in Normalform:

$$(T) \quad -\frac{A}{m'}(T_\infty - m' G_\infty) = 0, \quad (T_1) \equiv \frac{A}{m'}(T_\infty + m' G_\infty) = 0,$$

$$(T') \equiv A'(G'_\infty - m' T'_\infty) = 0, \quad (T_1') \equiv A'(G'_\infty + m' T'_\infty) = 0.$$

Substituirt man in die beiden ersten Gleichungen die Coordinaten eines Punktes von G_∞, so wird für denselben $G_\infty = 0$; geht T_∞ durch diese Substitution in t über, so erhält man für die Abstände p und p_1 der Ebenen $T T_1$ von der Gegenebene G_∞:

$$p = -\frac{A}{m'}t, \quad p_1 = \frac{A}{m'}t.$$

Ebenso erhält man aus den letzten zwei Normalformen durch Substitution der Coordinaten eines Punktes der Gegenebene G'_∞, für welche T'_∞ in t' übergehen möge, — wenn $p' p_1'$ die Abstände der Gegenebene von T' und T_1' bezeichnen:

$$p' = -m' A' t', \quad p_1' = m' A' t'.$$

Also hat man:

$$p = -p_1, \quad p' = -p_1',$$

q. e. d.

12. **Entsprechende affine Ebenen in collinearen Systemen.**

Die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte werden aus den Coordinaten von irgend vier Paar entsprechenden Punkten $P_a P_b P_c P_d$ durch folgende Formeln abgeleitet:

$$x_k = \frac{\mu_a \sigma_a x_{ka} + \mu_b \sigma_b x_{kb} + \mu_c \sigma_c x_{kc} + \mu_d \sigma_d x_{kd}}{\mu_a \sigma_a + \mu_b \sigma_b + \mu_c \sigma_c + \mu_d \sigma_d}.$$

$$x_k' = \frac{\mu_a \tau_a x'_{ka} + \mu_b \tau_b x'_{kb} + \mu_c \tau_c x'_{kc} + \mu_d \tau_d x'_{kd}}{\mu_a \tau_a + \mu_b \tau_b + \mu_c \tau_c + \mu_d \tau_d}.$$

Dann setzt man für die Coordinaten der vier Punktepaare $P_a P'_a$ etc.

die aus den Coordinaten von $P_1 P_1'$ etc. abgeleiteten Werthe ein, so gelangt man zu Resultaten von der Form

$$x_k = (\lambda_1 \alpha_1 x_{k1} + \cdots + \lambda_4 \alpha_4 x_{k4}) : \sigma,$$
$$x'_k = (\lambda_1 \beta_1 x'_{k1} + \cdots + \lambda_4 \beta_4 x'_{k4}) : \tau,$$
$$\lambda_i = \mu_a \lambda_{ia} + \mu_b \lambda_{ib} + \mu_c \lambda_{ic} + \mu_d \lambda_{id}.$$

Insbesondere gilt für die Punkte der Ebenen $P_a P_b P_c$ bez. $P'_a P'_b P'_c$:

$$x_k = \frac{\mu_a \sigma_a x_{1a} + \mu_b \sigma_b x_{1b} + \mu_c \sigma_c x_{1c}}{\mu_a \sigma_a + \mu_b \sigma_b + \mu_c \sigma_c},$$
$$x'_k = \frac{\mu_a \tau_a x'_{1a} + \mu_b \tau_b x'_{1b} + \mu_c \tau_c x'_{1c}}{\mu_a \tau_a + \mu_b \tau_b + \mu_c \tau_c}.$$

Sollen diese Ebenen affin sein, so muss die Proportion erfüllt werden:

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = \tau_a : \tau_b : \tau_c.$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\sigma_a \tau_b - \sigma_b \tau_a = 0, \quad \sigma_b \tau_c - \sigma_c \tau_b = 0, \quad \sigma_c \tau_a - \sigma_a \tau_c = 0.$$

Denkt man sich eins der Punktepaare, z. B. $P_c P'_c$, gegeben, so sind σ_c und τ_c bekannt, und die Gleichungen für $\sigma_a \tau_a$, $\sigma_b \tau_b$ nehmen die Gestalt an:

$$m\sigma_a + n\tau_a = 0, \qquad m\sigma_b + n\tau_b = 0.$$

Die Punkte P_a und P_b liegen demnach mit P_c, und ebenso $P'_a P'_b$ und P'_c auf derselben Parallelebene zu G_∞ bez. G'_∞.

Die entsprechenden Ebenen collinearer Systeme, welche den Gegenebenen parallel gehen, sind affin.

Dieses Resultat ist in Uebereinstimmung mit dem Umstande, dass die unendlich fernen Punkte solcher Ebenenpaare sich entsprechen.

13. **Das Verhältniss entsprechender Flächen auf affinen Ebenen** ist gleich dem Verhältniss differentieller entsprechender Flächen und wird demnach gefunden, indem man das Verhältniss differentieller entsprechender Tetraeder, von denen drei Paar Punkte auf den beiden affinen Ebenen liegen, durch das Verhältniss der Höhen dividirt.

Das Verhältniss der Höhen ist der Differentialquotient $dp : dp'$ und ergiebt sich aus

$$pp' = \left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v}\right)^2 \cdot V \cdot V' \cdot A \cdot A'.$$

Man erhält

$$dp : dp' = -\left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v}\right)^2 \cdot V . V' . A . A' : p'^2.$$

Substituirt man:

$$p'^2 = \left(\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{v}\right)^2 \cdot V'^2 . A'^2 . \frac{\sigma^2}{\tau^2},$$

so entsteht:

$$dp : dp' = -\frac{V . A}{V' . A'} \cdot \frac{\tau^2}{\sigma^2}.$$

Hieraus folgt das Verhältniss γ entsprechender Flächen auf zwei affinen Ebenen:

$$\gamma = \frac{w}{w'} : \frac{dp}{dp'} = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 . A' . \tau^2}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 . A . \sigma^2}.$$

Das Vorzeichen von γ sowie das von $w : w'$ ist für alle Punkte der beiden Systeme dasselbe. Man sieht leicht, dass die entsprechenden Flächen auf zwei affinen Ebenen, von den Gegenebenen aus betrachtet, gleichsinnig oder ungleichsinnig erscheinen, je nachdem $w : w'$ negativ oder positiv ist.

14. Lehrsatz: Die entsprechenden Ebenen, deren Abstände von zwei festen entsprechenden Punkten P_a P'_a (und damit auch von allen Paaren entsprechender Punkte, welche auf den beiden durch P_a und P'_a gelegten Parallelen zu den Gegenebenen liegen) ein gegebenes Verhältniss haben, bilden zwei Paar entsprechende Bündel.

Beweis. Nach Nro. 8 ist das Verhältniss der Abstände zweier entsprechenden Punkte, denen σ_a und τ_a zugehört, von zwei entsprechenden Ebenen, deren Multiplicatoren A und A' sind:

$$\frac{\xi_a}{\xi'_a} = \frac{A . V . \sigma_a}{A' . V' . \tau_a}.$$

Soll dasselbe constant sein, so folgt für die Multiplicatoren der zugehörigen Ebenen eine Bedingungsgleichung von der Form:

a) $$A = kA'.$$

Da das Vorzeichen der Abstände hier gleichgültig ist, so hat man zu benutzen:

b) $$A^2 = k^2 A'^2.$$

Um die Multiplicatoren durch die Constanten der Ebenen auszudrücken, substituire man in die Normalgleichungen:

$$A\,T \equiv A\left(\frac{n_1}{\alpha_1} T_1 - \frac{n_2}{\alpha_2} T_2 + \frac{n_3}{\alpha_3} T_3 - \frac{n_4}{\alpha_4} T_4\right) = 0,$$

$$A'\,T' \equiv A'\left(\frac{n_1}{\beta_1} T_1' - \frac{n_2}{\beta_2} T_2' + \frac{n_3}{\beta_3} T_3' - \frac{n_4}{\beta_4} T_4'\right) = 0$$

der Reihe nach die Coordinaten der drei Tetraederpunkte; dann erhält man für die Abstände der beiden Ebenen von den Tetraederecken die Formeln:

$$p_k = A \cdot \frac{n_k}{\alpha_k} \cdot h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V}{v},$$

$$p_k' = A' \cdot \frac{n_k}{\beta_k} \cdot h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{V'}{v}.$$

Diese Werthe erfüllen die Identität für Plücker'sche Coordinaten:

$$9\,V^2 = p_1^2 g_1^2 + \cdots + p_4^2 g_4^2 - 2\,p_1 p_2 g_1 g_2 \cos\gamma_{12} - \cdots$$
$$\cdots - 2\,p_3 p_4 g_3 g_4 \cos\gamma_{34},$$

$$9\,V'^2 = p_1'^2 g_1^2 + \cdots - 2\,p_3' p_4' g_3 g_4 \cos\gamma_{34}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{A^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_4^2}{9\,v^2}\left[\frac{n_1^2}{\alpha_1^2} g_1^2 + \cdots + \frac{n_4^2}{\alpha_4^2} g_4^2 - 2\,\frac{n_1 n_2}{\alpha_1 \alpha_2} g_1 g_2 \cos\gamma_{12} - \cdots\right],$$

$$\frac{1}{A'^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_4^2}{9\,v^2}\left[\frac{n_1^2}{\beta_1^2} g_1^2 + \cdots + \frac{n_4^2}{\beta_4^2} g_4^2 - 2\,\frac{n_1 n_2}{\beta_1 \beta_2} g_1 g_2 \cos\gamma_{12} - \cdots\right].$$

Setzt man diese Werthe in

$$\text{b)} \qquad A^2 = k^2 A'^2$$

ein, so erfolgt eine Gleichung zweiten Grades für die Ableitungszahlen n_k; mithin liefert die Gleichung zwei entsprechende Gebilde zweiter Ordnung.

Um nachzuweisen, dass jedes derselben sich in zwei Bündel (zwei Punkte) auflöst, nehme man an, T_1 und T_1' genügen der Gleichung b) und a); dann wird man immer noch zwei Paare entsprechende Ebenen $T_2\,T_2'$, $T_3\,T_3'$ finden können, deren Multiplicatoren (auch in Rücksicht auf die Vorzeichen) der Gleichung a) genügen.

Die Ableitungszahlen dieser Ebenen seien n_{k1}, n_{k2}, n_{k3}, alsdann gehören den Ableitungszahlen

$$n_k = c_1 n_{k1} + c_2 n_{k2} + c_3 n_{k3}$$

zwei beliebige entsprechende Ebenen der Bündel $T_1\,T_2\,T_3$ und $T_1'\,T_2'\,T_3'$ zu.

Man setze nun n_k in die obigen Formeln für $\frac{1}{A^2}$ und $\frac{1}{A'^2}$ ein, und beachte, dass

$$\cos\widehat{T_i T_j} = -\frac{1}{9\,v^2}\left[p_{1i} p_{1j} g_1^2 + \cdots - (p_{1i} p_{2j} + p_{2i} p_{1j}) g_1 g_2 \cos\gamma_{12} - \cdots\right].$$

Alsdann erhält man:

16*

$$\frac{1}{A^2} = c_1^2 \frac{1}{A_1^2} + c_2^2 \frac{1}{A_2^2} + c_3^2 \frac{1}{A_3^2} - 2 c_1 c_2 \frac{1}{A_1 A_2} \cos \widehat{T_1 T_2}$$
$$- 2 c_1 c_3 \frac{1}{A_1 A_3} \cos \widehat{T_1 T_3} - 2 c_2 c_3 \frac{1}{A_2 A_3} \cos \widehat{T_2 T_3},$$
$$\frac{1}{A'^2} = c_1^2 \frac{1}{A_1'^2} + c_2^2 \frac{1}{A_2'^2} + c_3^2 \frac{1}{A_3'^2} - 2 c_1 c_2 \frac{1}{A_1' A_2'} \cos \widehat{T_1' T_2'}$$
$$- 2 c_1 c_3 \frac{1}{A_1' A_3'} \cos \widehat{T_1' T_3'} - 2 c_2 c_3 \frac{1}{A_2' A_3'} \cos \widehat{T_2' T_3'}.$$

Beachtet man, dass

$$A_1 = k A_1', \qquad A_2 = k A_2', \qquad A_3 = k A_3',$$

so folgt:

$$A = k A'.$$

Demnach entsprechen alle Ebenen des Bündels $T_1 T_2 T_3$ resp. $T_1' T_2' T_3'$ der Bedingungsgleichung b). Da nun dieselbe kein Quadrat einer linearen Function der n_k ist, so folgt, dass dieser Gleichung noch ein zweites Bündel und das entsprechende zugehören.

Für zwei entsprechende Parallelen $T T'$ zu den Gegenebenen ist

$$n_k = \mu \alpha_k + \nu \beta_k.$$

Sind B und B' die Multiplicatoren der Gegenebenen, wenn deren Gleichungen in der Form $n_k = \beta_k$ für G_∞, $n_k = \alpha_k$ für G'_∞ vorausgesetzt werden, so haben T und T' die Multiplicatoren

$$A = \frac{1}{\nu} B, \qquad A' = \frac{1}{\mu} B'.$$

Genügen $T T'$ der Gleichung b), so ist

$$\frac{\mu^2}{\nu^2} = \frac{k^2 B'^2}{B^2}.$$

Bezeichnet $\mu : \nu$ die positive Wurzel der rechten Seite, so liegen demnach die Centra der beiden Bündel des ersten Systems auf den Ebenen

$$T \equiv \mu T_\infty \pm \nu G_\infty,$$

und die Centra der Bündel des zweiten Systems sind enthalten in

$$T' \equiv \mu G'_\infty \pm \nu T'_\infty.$$

Hieraus folgt, dass die Centra der beiden Bündel in jedem System entgegengesetzt gleiche Abstände von den Gegenebenen haben.

§. 3.

Doppelelemente zweier collinearen räumlichen Systeme.

1. Doppelpunkte. Ist P ein selbstentsprechender Punkt zweier collinearen räumlichen Systeme, so sind die vier Gleichungen erfüllt

a)
$$M_i : \sigma = N_i : \tau,$$

wenn abkürzend bezeichnet wird:

$$M_i = \lambda_1 \alpha_1 x_{i1} + \lambda_2 \alpha_2 x_{i2} + \lambda_3 \alpha_3 x_{i3} + \lambda_4 \alpha_4 x_{i4},$$
$$N_i = \lambda_1 \beta_1 x'_{i1} + \lambda_2 \beta_2 x'_{i2} + \lambda_3 \beta_3 x'_{i3} + \lambda_4 \beta_4 x'_{i4}.$$

Diese Gleichungen liefern für $\sigma = \tau = 0$ keine geometrisch brauchbaren Werthe; denn die entsprechenden Punkte, deren λ dieser Bedingung genügen, haben zwar beide unendlich grosse Coordinaten, liegen aber im Allgemeinen von zwei endlichen Punkten aus nicht in derselben Richtung, fallen also im Allgemeinen nicht zusammen.

Hiernach verbleibt als ausreichende und nothwendige Bedingung für die λ von Doppelpunkten, wenn k einen noch zu bestimmenden Factor bezeichnet:

b)
$$\sigma = k\tau, \qquad M_2 = kN_2,$$
$$M_1 = kN_1, \qquad M_3 = kN_3,$$
$$M_4 = kN_4.$$

Multiplicirt man die vier letzten dieser Gleichungen der Reihe nach mit $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$ und addirt, so erhält man die erste Gleichung mit dem dreifachen Inhalt des Axentetraeders multiplicirt; demnach darf eine dieser fünf Gleichungen weggelassen werden. Lässt man, um möglichst symmetrische Formen zu erhalten, die erste Gleichung weg und ordnet die übrigen nach $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4$, so erhält man vier homogene lineare verschwindende Functionen, deren Verein das Verschwinden der Determinante des Systems erfordert:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x_{11} - k\beta_1 x'_{11}, & \alpha_2 x_{12} - k\beta_2 x'_{12}, & \alpha_3 x_{13} - k\beta_3 x'_{13}, & \alpha_4 x_{14} - k\beta_4 x'_{14} \\ \alpha_1 x_{21} - k\beta_1 x'_{21}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 x_{31} - k\beta_1 x'_{31}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 x_{41} - k\beta_1 x'_{41}, & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist biquadratisch für k und liefert keine, zwei oder vier reelle Wurzeln. Zu jeder der Wurzeln liefert dann das System b) ein und nur ein zugehöriges System von Lösungen:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4;$$

jede dieser Lösungen liefert einen Doppelpunkt.

Hiernach besitzen zwei collineare räumliche Systeme im Allgemeinen keinen, zwei oder vier Doppelpunkte.

2. Doppelebenen. Setzt man abkürzend

$$T_i = \delta_{1i}x_1 + \delta_{2i}x_2 + \delta_{3i}x_3 + \delta_{4i}x_4,$$
$$T_i' = \varepsilon_{1i}x_1' + \varepsilon_{2i}x_2' + \varepsilon_{3i}x_3' + \varepsilon_{4i}x_4',$$

so erhalten die Gleichungen zweier entsprechenden Ebenen die Form:

$$\text{d)}\quad \begin{aligned} T &\equiv \Sigma\left(\frac{l_1}{\alpha_1}\delta_{k1} + \frac{l_2}{\alpha_2}\delta_{k2} + \frac{l_3}{\alpha_3}\delta_{k3} + \frac{l_4}{\alpha_4}\delta_{k4}\right)x_k = 0 \\ T' &\equiv \Sigma\left(\frac{l_1}{\beta_1}\varepsilon_{k1} + \frac{l_2}{\beta_2}\varepsilon_{k2} + \frac{l_3}{\beta_3}\varepsilon_{k3} + \frac{l_4}{\beta_4}\varepsilon_{k4}\right)x_k' = 0. \end{aligned} \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Ist eine Ebene selbstentsprechend, so hat ihre Gleichung zugleich die Form $T = 0$ und $\mu T' = 0$, wenn μ einen noch unbestimmten Factor bezeichnet.

Die Identität

$$T \equiv \mu T'$$

liefert die vier Gleichungen der l:

$$\text{e)}\quad l_1\left(\frac{1}{\alpha_1}\delta_{k1} - \mu\frac{1}{\beta_1}\varepsilon_{k1}\right) + l_2\left(\frac{1}{\alpha_2}\delta_{k2} - \mu\frac{1}{\beta_2}\varepsilon_{k2}\right) + l_3\left(\frac{1}{\alpha_3}\delta_{k3} - \mu\frac{1}{\beta_3}\varepsilon_{k3}\right) + l_4\left(\frac{1}{\alpha_4}\delta_{k4} - \mu\frac{1}{\beta_4}\varepsilon_{k4}\right) = 0.$$

Der Verein dieser Gleichungen erfordert das Verschwinden der Determinante:

$$\text{f)}\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1}\delta_{11} - \mu\frac{1}{\beta_1}\varepsilon_{11}, & \frac{1}{\alpha_2}\delta_{12} - \mu\frac{1}{\beta_2}\varepsilon_{12}, & \frac{1}{\alpha_3}\delta_{13} - \mu\frac{1}{\beta_3}\varepsilon_{13}, & \frac{1}{\alpha_4}\delta_{14} - \mu\frac{1}{\beta_4}\varepsilon_{14} \\ \frac{1}{\alpha_1}\delta_{21} - \mu\frac{1}{\beta_1}\varepsilon_{21}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha_1}\delta_{31} - \mu\frac{1}{\beta_1}\varepsilon_{31}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\alpha_1}\delta_{41} - \mu\frac{1}{\beta_1}\varepsilon_{41}, & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

Diese Gleichung ist biquadratisch für μ. Jede reelle Wurzel derselben liefert ein und nur ein System von Lösungen der Gleichungen e):

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_4;$$

jedes dieser Systeme liefert die Gleichung einer Doppelebene.

Demnach giebt es in collinearen räumlichen Systemen im Allgemeinen keine, zwei oder vier selbstentsprechende Ebenen.

3. Jeder Doppelpunkt ist Träger zweier entsprechenden concentrischen Ebenenbündel; zwei collineare concentrische Büschel haben mindestens eine Doppelebene; demnach giebt es stets mindestens so viel Doppelebenen wie Doppelpunkte.

Jede Doppelebene ist Träger zweier auf einander liegender collinearer Punktsysteme; zwei collineare Ebenen haben mindestens einen Doppelpunkt; demnach haben zwei collineare räumliche Systeme mindestens so viel Doppelpunkte als Doppelebenen.

Aus beiden Bemerkungen folgt:

Zwei collineare räumliche Systeme haben eine gleiche Anzahl Doppelpunkte und Doppelebenen. Jeder Doppelpunkt liegt in einer der Doppelebenen.

4. Man nehme nun zwei Doppelpunkte $Q_1\ Q_2$ und zwei Doppelebenen $S_1\ S_2$ an; es liege Q_1 auf S_1, Q_2 auf S_2. Giebt es noch zwei Doppelpunkte und nicht mehr, so können dieselben nicht ausserhalb der Geraden $S_1\ S_2$ liegen. Denn ist Q ausserhalb $S_1\ S_2$ ein Doppelpunkt, so ist z. B. $Q_1\ Q$ eine selbstentsprechende Gerade, da sie zwei selbstentsprechende Punkte enthält; der endlich oder unendlich ferne Punkt, den diese Gerade mit S_2 gemein hat, ist dann ebenfalls Doppelpunkt; denn ihm entspricht ein Punkt, der sowohl auf S_2 als auf $Q\ Q_1$ gelegen ist. Hat aber eine Gerade drei selbstentsprechende Punkte, so sind alle ihre Punkte selbstentsprechend. Das ist gegen die Voraussetzung, dass nur vier Doppelpunkte der beiden räumlichen Systeme vorhanden sind. Nimmt man Q auf S_1 oder S_2 aber ausserhalb der Kante beider Ebenen an, so schliesst man, dass dann $Q_1\ Q$ bez. $Q_2\ Q$ lauter Doppelpunkte enthalten würden, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Ebenso schliesst man, dass wenn es noch zwei und nur diese Doppelebenen giebt, dieselben die Kante $Q_1\ Q_2$ enthalten müssen.

Es bilden demnach die vier Doppelpunkte und die vier Doppelebenen die vier Ecken und die vier Seiten eines und desselben selbstentsprechenden Tetraeders.

5. Sind vier Doppelpunkte vorhanden, die nicht in einer Ebene liegen, so gewinnen die Collineationsgleichungen die einfachste Form, wenn man sie auf das selbstentsprechende Tetraeder bezieht. Man erhält für die Coordinaten entsprechender Punkte:

$$x_k = \frac{\lambda_k \alpha_k}{\sigma} h_k,$$

$$x'_k = \frac{\lambda_k \beta_k}{\tau} h_k.$$

Für die Coordinaten entsprechender Ebenen ergiebt sich

$$u_k = \frac{l_k a_k}{s} \cdot \frac{h_k}{r_k},$$

$$u_k' = \frac{l_k b_k}{t} \cdot \frac{h_k}{r_k}.$$

Die Gleichungen entsprechender Ebenen und entsprechender Geraden nehmen ebenfalls eine einfache Gestalt an, die sich leicht herstellen lässt.

6. Zwei collineare Systeme lassen sich durch Lagenveränderung des einen immer in eine solche gegenseitige Lage bringen, dass sie vier Doppelpunkte besitzen.

Man vereine zwei entsprechende Punkte im Punkte A. Durch Drehung des zweiten Systems vereine man nun zwei entsprechende Geraden, welche durch A gehen.

Die beiden auf einander liegenden Geraden haben ausser A stets noch einen Doppelpunkt B. AB ist der Träger zweier entsprechenden Büschel; man drehe das zweite System um AB so lange, bis irgend zwei entsprechende Ebenen beider Büschel sich decken. In dieser Doppelebene liegt dann ausserhalb AB noch ein Doppelpunkt C. Die beiden coaxialen Büschel haben ausser ABC noch eine Doppelebene, und diese enthält ausserhalb AB noch einen Doppelpunkt D. Mithin haben nun die beiden Systeme die vier Doppelpunkte $ABCD$, q. e. d.

Sätze über Büschel und Schaaren von Curven und Flächen zweiter Ordnung.

---

1. Definition des Kegelschnittbüschels. Wenn die Coefficienten a_{ik} der Gleichung eines Kegelschnitts in Punktcoordinaten

$$K \equiv a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0$$

homogene lineare Functionen zweier Variabeln $\lambda \mu$ (oder nicht homogene Functionen einer Variabeln) sind, nämlich

a) $$a_{ik} = a'_{ik} \lambda + a''_{ik} \mu,$$

so heisst die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Coefficienten durch die Substitution zweier reellen Werthe $\lambda \mu$ in die Formeln a) hervorgehen, ein Kegelschnittbüschel.

Definition der Kegelschnittschaar. Wenn die Coefficienten a_{ik} der Gleichung eines Kegelschnitts Plancoordinaten

$$\mathfrak{K} \equiv a_{11} u_1^2 + 2a_{12} u_1 u_2 + 2a_{13} u_1 u_3 + a_{22} u_2^2 + 2a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2 = 0$$

homogene lineare Functionen zweier Variabeln $\lambda \mu$ sind:

b) $$a_{ik} = a'_{ik} \lambda + a''_{ik} \mu,$$

so heisst die Gesammtheit aller Kegelschnitte, deren Coefficienten durch Substitution reeller Werthe $\lambda \mu$ in die Formeln b) hervorgehen, eine Kegelschnittschaar.

Setzt man abkürzend

c) $$\begin{aligned} K' &\equiv a_{11}' x_1^2 + 2a_{12}' x_1 x_2 + 2a_{13}' x_1 x_3 + a_{22}' x_2^2 + 2a_{23}' x_2 x_3 + a_{33}' x_3^2 \\ K'' &\equiv a_{11}'' x_1^2 + \dots\dots\dots\dots + a_{33}'' x_3^2 \\ \mathfrak{K}' &\equiv a_{11}' u_1^2 + 2a_{12}' u_1 u_2 + 2a_{13}' u_1 u_3 + a_{22}' u_2^2 + 2a_{23}' u_2 u_3 + a_{33}' u_3^2 \\ \mathfrak{K}'' &\equiv a_{11}'' u_1^2 + \dots\dots\dots\dots + a_{33}'' u_3^2, \end{aligned}$$

so sind demnach die Gleichungen aller Kegelschnitte eines Büschels unter der Form enthalten:

d) $$K \equiv \lambda K' + \mu K'' = 0,$$

und die Kegelschnitte einer Schaar unter der Form:

e) $$\mathfrak{K} \equiv \lambda \mathfrak{K}' + \mu \mathfrak{K}'' = 0.$$

Durch eine lineare Transformation mögen $KK'K''$ in $K_1 K_1' K_1''$, so wie $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'\mathfrak{K}''$ in $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_1' \mathfrak{K}_1''$ transformirt werden. Alsdann hat man

$$K_1 \equiv \lambda K_1' + \mu K_1'',$$
$$\mathfrak{K}_1 \equiv \lambda \mathfrak{K}_1' + \mu \mathfrak{K}_1'',$$

und folglich, wenn b_{ik}, b'_{ik}, b''_{ik} die Coefficienten von $K_1 K_1' K_1''$ beziehentlich von $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_1' \mathfrak{K}_1''$ bezeichnen:

$$b_{ik} = \lambda b'_{ik} + \mu b''_{ik}.$$

Hieraus folgt: Die Eigenschaft von Kegelschnitten, ein Büschel oder eine Schaar zu bilden, ist unabhängig vom Coordinatensysteme.

2. Es seien $K_1 K_2$ zwei Kegelschnitte des Büschels, welche den Werthen $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ für λ und μ zugehören, so dass also

$$K_1 = a_1 K' + a_2 K'',$$
$$K_2 = b_1 K' + b_2 K'',$$

so erhält man durch Auflösung dieses Systems:

$$K' = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(b_2 K_1 - a_2 K_2),$$
$$K'' = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(- b_1 K_1 + a_1 K_2).$$

Indem man diese Werthe in

$$K = \lambda K' + \mu K''$$

substituirt, erhält man:

$$K = \frac{b_2 \lambda - b_1 \mu}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot K_1 + \frac{a_1 \mu - a_2 \lambda}{a_1 b_2 - a_2 b_1} K_2.$$

Setzt man

$$\frac{b_2 \lambda - b_1 \mu}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \lambda_1, \qquad \frac{a_1 \mu - a_2 \lambda}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \mu_1,$$

so durchlaufen für alle möglichen reellen Werthe von $\lambda \mu$ auch die $\lambda_1 \mu_1$ alle reellen Werthe, können also als neue variable Multiplicatoren statt $\lambda \mu$ verwendet werden. Man hat alsdann

$$K = \lambda_1 K_1 + \mu_1 K_2.$$

Demnach lassen sich die Gleichungen der Kegelschnitte eines Büschels aus den Gleichungen je zweier Kegelschnitte des Büschels mittelst zweier reellen Multiplicatoren nach der Formel herleiten:

$$K = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2.$$

Indem man eine ganz gleichlautende Untersuchung für Kegelschnitte einer Schaar anstellt, erhält man:

Die Gleichungen der Kegelschnitte einer Schaar lassen sich aus den Gleichungen je zweier Kegelschnitte der Schaar mit Hülfe zweier reellen Multiplicatoren nach der Formel ableiten:

$$\mathfrak{K} = \lambda_1 \mathfrak{K}_1 + \lambda_2 \mathfrak{K}_2.$$

Hieraus folgt: Ein Büschel und eine Schaar sind durch zwei Kegelschnitte, die ihnen angehören, bestimmt.

3. Wenn zwei Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar einen gemeinsamen Punkt bez. eine gemeinsame Tangente haben, so ist dieser Punkt bez. diese Tangente allen Kegelschnitten des Büschels oder der Schaar gemein.

Denn sind $K_1 K_2$ oder $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ die betrachteten beiden Kegelschnitte, so leite man die übrigen nach den Formeln ab:

$$K \equiv \lambda K_1 + \mu K_2 = 0,$$
$$\mathfrak{K} \equiv \lambda \mathfrak{K}_1 + \mu \mathfrak{K}_2 = 0.$$

Alle Coordinatengruppen x_k oder u_k, welche gleichzeitig den Gleichungen genügen:

$$K_1 = 0 \text{ und } K_2 = 0,$$
$$\text{oder} \quad \mathfrak{K}_1 = 0 \text{ und } \mathfrak{K}_2 = 0,$$

erfüllen dann in der That auch die Gleichung jedes andern Kegelschnitts des Büschels oder der Schaar:

$$K = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Mit Hülfe dieses Satzes beweist man apagogisch:

Wenn irgend zwei Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar keinen gemeinsamen Punkt bez. keine gemeinsame Tangente besitzen, so haben auch irgend zwei Kegelschnitte des Büschels oder der Schaar keinen gemeinsamen Punkt bez. keine gemeinsame Tangente.

Denn hätte irgend ein Paar ein gemeinsames Element, so wäre dies auch jedem andern Paare gemeinsam, im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass es ein Paar giebt, welches nichts Gemeinsames enthält.

4. Wenn ein Punkt und eine Gerade für zwei Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar Pol und Polare

sind, so sind sie es für alle Kegelschnitte der beiden Gebilde.

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte des Büschels, welche ein Paar Pol und Polare gemein haben, mögen sein

$$f' = 0, \qquad f'' = 0.$$

Ist Π der Punkt, der für beide Kegelschnitte dieselbe Polare hat, und φ_i der Werth, den $\partial f : \partial x_i$ für die Coordinaten von Π annimmt, so sind die beiden Gleichungen:

a) $\varphi_1' x_1 + \varphi_2' x_2 + \varphi_3' x_3 = 0, \qquad \varphi_1'' x_1 + \varphi_2'' x_2 + \varphi_3'' x_3 = 0,$

nur um constante Multiplicatoren verschieden, d. h.

b) $$\varrho \varphi_1' = \sigma \varphi_1'', \quad \varrho \varphi_2' = \sigma \varphi_2'', \quad \varrho \varphi_3' = \sigma \varphi_3''.$$

Die Polare des Punktes π in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt des Büschels

$$\lambda f' + \mu f'' = 0$$

hat die Gleichung

$$(\lambda \varphi_1' + \mu \varphi_1'') x_1 + (\lambda \varphi_2' + \mu \varphi_2'') x_2 + (\lambda \varphi_3' + \mu \varphi_3'') x_3 = 0,$$

oder:

$$\lambda (\varphi_1' x_1 + \varphi_2' x_2 + \varphi_3' x_3) + \mu (\varphi_1'' x_1 + \varphi_2'' x_2 + \varphi_3'' x_3) = 0.$$

Drückt man nach b) die Werthe φ_i' durch die φ_i'' aus oder umgekehrt und substituirt dies in die eben gewonnene Gleichung, so sieht man, dass dieselbe von jeder der beiden Gleichungen a) nur um einen constanten Multiplicator abweicht, q. e. d.

Ebenso beweist man den analogen Satz für Schaaren:

Seien $f' = 0$, $f'' = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte in Plancoordinaten, also

$$f \equiv \lambda f' + \mu f'' = 0$$

die eines beliebigen Kegelschnittes der Schaar; sei $\mathfrak{T}$ die Gerade, die für f' und f'' ein und denselben Pol hat, und φ_i der Werth, welchen $\partial f : \partial u_i$ für die Coordinaten von $\mathfrak{T}$ annimmt; so ist die Gleichung des Pols von $\mathfrak{T}$ in Bezug auf die beiden Kegelschnitte

c) $\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3 = 0$ und $\varphi_1'' u_1 + \varphi_2'' u_2 + \varphi_3'' u_3 = 0.$

Da beide denselben Punkt, den gemeinsamen Pol, bezeichnen, so können sie nur um constante Multiplicatoren verschieden sein, so dass

d) $$\sigma \varphi_i' = \sigma \varphi_i'', \qquad i = 1, 2, 3.$$

Die Gleichung des Pols von $\mathfrak{T}$ in Bezug auf $f = 0$ lässt sich schreiben

$$\lambda(\varphi_1' u_1 + \varphi_2' u_2 + \varphi_3' u_3) + \mu(\varphi_1'' u_1 + \varphi_2'' u_2 + \varphi_3'' u_3) = 0;$$

mit Hülfe der Formeln d) wird gezeigt, dass diese Gleichung von den Gleichungen c) nur um constante Factoren abweicht, also denselben Punkt bedeutet, q. e. d.

Insbesondere findet man:

Ein Dreieck, welches für zwei Kegelschnitte $K_1 K_2$ zugleich sich selbst conjugirt ist, ist für alle Kegelschnitte des durch K_1 und K_2 bestimmten Büschels, sowie für alle Kegelschnitte der durch $K_1 K_2$ bestimmten Schaar sich selbst conjugirt.

5. Bestimmung der Punkte, deren Polaren in Bezug auf zwei Kegelschnitte zusammenfallen. Bestimmung der Geraden, deren Pole in Bezug auf zwei Kegelschnitte zusammenfallen.

Die Gleichungen der beiden Kegelschnitte seien

$$\begin{aligned} f' &\equiv a_{11} x_1^2 + \cdots = 0, \\ f'' &\equiv b_{11} x_1^2 + \cdots = 0, \\ f' &\equiv c_{11} u_1^2 + \cdots = 0, \\ f'' &\equiv d_{11} u_1^2 + \cdots = 0, \end{aligned}$$

so hat man diejenigen Punkte Π zu bestimmen, deren Coordinaten die Gleichungen erfüllen:

$$\text{a)} \qquad \begin{aligned} \varrho \varphi_1' - \sigma \varphi_1'' &= 0, \\ \varrho \varphi_2' - \sigma \varphi_2'' &= 0, \\ \varrho \varphi_3' - \sigma \varphi_3'' &= 0, \end{aligned}$$

und je nachdem man in Punkt- oder in Plancoordinaten rechnet, noch eine der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 &= \Delta, \\ g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 &= \Delta. \end{aligned}$$

Ausser den unbekannten Coordinaten enthalten die ersten drei Gleichungen das unbekannte Verhältniss $\varrho : \sigma$. Da nun die ersten drei Gleichungen homogen und linear in Bezug auf die Coordinaten sind, so folgt, dass ihre Determinante verschwindet, d. i.

für Punktcoordinaten:

$$\text{b)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}\varrho - b_{11}\sigma, & a_{12}\varrho - b_{12}\sigma, & a_{13}\varrho - b_{13}\sigma \\ a_{12}\varrho - b_{12}\sigma, & a_{22}\varrho - b_{22}\sigma, & a_{23}\varrho - b_{23}\sigma \\ a_{13}\varrho - b_{13}\sigma, & a_{23}\varrho - b_{23}\sigma, & a_{33}\varrho - b_{33}\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

für Plancoordinaten:

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} c_{11}\varrho - d_{11}\sigma, & c_{12}\varrho - d_{12}\sigma, & c_{13}\varrho - d_{13}\sigma \\ c_{12}\varrho - d_{12}\sigma, & c_{22}\varrho - d_{22}\sigma, & c_{23}\varrho - d_{23}\sigma \\ c_{13}\varrho - d_{13}\sigma, & c_{23}\varrho - d_{23}\sigma, & c_{33}\varrho - d_{33}\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen berechne man $\varrho : \sigma$. Jeder reelle Werth wird in zwei Gleichungen des Systems a) eingesetzt und liefert dann mit Hülfe der Identitäten

$$\varDelta = \cdots$$

immer ein und nur ein reelles Werthsystem der Coordinaten.

Da nun ein Pol und seine Polare wechselseitig eindeutig zusammengehören, so folgt:

Die beiden Gleichungen b) und c), welche sich auf dasselbe Paar von Kegelschnitten beziehen, haben gleichviel reelle Wurzeln.

Da ferner entweder eine oder drei reelle Wurzeln vorhanden sind, so folgt:

Zwei Kegelschnitte haben entweder eine oder drei Paar Pole und Polare, welche beiden gemeinsam sind.

6. Bestimmung der in einem Büschel enthaltenen Geradenpaare bez. der in einer Schaar enthaltenen Punktepaare.

Der Kegelschnitt (in Punkt- oder Plancoordinaten)

$$K \equiv \lambda f' + \mu f'' = 0$$

ist ein Geradenpaar oder ein Punktepaar, wenn sich die linke Seite in ein Product zweier linearen Functionen mit reellen Coefficienten zerlegen lässt.

Sind ϱ und $(-\sigma)$ zwei Werthe von $\lambda \mu$, durch welche K in zwei lineare Factoren zerfällt, so verschwindet die Discriminante von

$$K \equiv \varrho f' - \sigma f''.$$

Dies liefert die Bedingungsgleichung für ϱ und σ.

Da nun für Punktcoordinaten diese Discriminante mit Nro. 4 b identisch ist, und für Plancoordinaten mit Nro. 4 c, so folgt:

Wenn zwei Kegelschnitte $f' = 0, f'' = 0$ nur ein Paar Pol und Polare gemein haben, so giebt es auch nur ein reelles Verhältniss $\varrho : \sigma$, für welches die Function

$$\varrho f' - \sigma f''$$

in lineare Factoren zerfällt. Haben hingegen die Kegelschnitte ein sich selbst conjugirtes Dreieck gemein, so

giebt es drei reelle Verhältnisse $\varrho : \sigma$, durch welche die Function in lineare Factoren zerlegbar wird.

Hieraus folgt weiter: Ein Kegelschnittbüschel hat höchstens drei Geradenpaare; diese bilden die sechs Seiten eines Vierecks, das allen Kegelschnitten des Büschels eingeschrieben ist und dessen zugehöriges Dreieck für alle Kegelschnitte des Büschels sich selbst conjugirt ist.

Eine Kegelschnittschaar enthält höchstens drei Paare von Punkten. Dieselben bilden die Ecken eines Vierseits, welches sämmtlichen Kegelschnitten der Schaar umschrieben ist. Das diesem Vierseit zugehörige Dreieck ist für alle Kegelschnitte der Schaar sich selbst conjugirt.

Hat ein Büschel oder eine Schaar ein sich selbst conjugirtes Dreieck, so ist die Gleichung je zweier Kegelschnitte derselben von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \\ K_2 \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 0 \end{array}\right\} \text{für das Büschel,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K}_1 \equiv a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0 \\ \mathfrak{K}_2 \equiv b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + b_3 u_3^2 = 0 \end{array}\right\} \text{für die Schaar.}$$

Die Discriminante von

$$\varrho K_1 - \sigma K_2 \quad \text{oder} \quad \varrho \mathfrak{K}_1 - \sigma \mathfrak{K}_2$$

reducirt sich auf

$$(\varrho a_1 - \sigma b_1)(\varrho a_2 - \sigma b_2)(\varrho a_3 - \sigma b_3) = 0,$$

hat also, wie vorauszusehen war, die drei reellen Wurzeln:

$$\varrho : \sigma = \begin{cases} b_1 : a_1 \\ b_2 : a_2 \\ b_3 : a_3. \end{cases}$$

Man setze dieselben in die Functionen

$$\varrho K_1 - \sigma K_2 \quad \text{und} \quad \varrho \mathfrak{K}_1 - \sigma \mathfrak{K}_2$$

ein; dieselben gehen dann in homogene quadratische Formen je zweier Coordinaten allein über.

Dies sind die Gleichungen der Geradenpaare des Büschels und der Punktepaare der Schaar. Man erhält die drei

Geradenpaare:

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) x_2^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) x_3^2 = 0,$$
$$(a_3 b_2 - a_2 b_3) x_3^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_1^2 = 0,$$
$$(a_1 b_3 - a_3 b_1) x_1^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2^2 = 0,$$

Punktepaare:

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) u_2^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3) u_3^2 = 0,$$
$$(a_3 b_2 - a_2 b_3) u_3^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) u_1^2 = 0,$$
$$(a_1 b_3 - a_3 b_1) u_1^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) u_2^2 = 0.$$

Diese Gebilde sind reell oder nicht, je nachdem die beiden Coefficienten jeder Gleichung ungleiche oder gleiche Zeichen haben, je nachdem also das Product je zweier Coefficienten negativ oder positiv ist. Das Product dieser drei Producte, d. i. das Product sämmtlicher sechs Coefficienten, ist

$$-(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2,$$

mithin immer negativ. Demnach ist unter den obigen Gleichungen mindestens eine, deren Coefficienten ungleiche Zeichen haben.

Dies ergiebt den Satz:

Wenn die Kegelschnitte eines Büschels ein sich selbst conjugirtes Dreieck gemein haben, so enthält das Büschel immer mindestens ein Geradenpaar.

Wenn die Kegelschnitte einer Schaar ein sich selbst conjugirtes Dreieck gemein haben, so enthält die Schaar mindestens ein Punktpaar.

Bezieht man zwei Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schaar, welche kein gemeinsames, sich selbst conjugirtes Dreieck haben, auf ein Dreieck, in welchem das gemeinsame Paar Pol und Polare die Ecke A_1 und die gegenüberliegende Seite $A_2 A_3$ bildet, so haben die Gleichungen derselben die Form:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &\equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0 \\ K_2 &\equiv b_{21} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + 2 b_{23} x_2 x_3 + b_{33} x_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{für das Büschel,}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &\equiv a_{11} u_1^2 + a_{22} u_2^2 + 2 a_{23} u_2 u_3 + a_{33} u_3^2 = 0 \\ \mathfrak{K}_2 &\equiv b_{11} u_1^2 + b_{22} u_2^2 + 2 b_{23} u_2 u_3 + b_{33} u_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{für die Schaar.}$$

Die Discriminante von

$$\varrho K_1 - \sigma K_2 \quad \text{oder} \quad \varrho \mathfrak{K}_1 - \sigma \mathfrak{K}_2$$

reducirt sich auf

$$(a_{11} \varrho - b_{11} \sigma) \begin{vmatrix} a_{22} \varrho - b_{22} \sigma & a_{23} \varrho - b_{23} \sigma \\ a_{23} \varrho - b_{23} \sigma & a_{33} \varrho - b_{33} \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Die in dem zweiten Factor auftretenden Coefficienten können in mehrfacher Weise so gewählt werden, dass die Annullirung desselben für complexe Verhältnisse $\varrho : \sigma$ erfolgt; dann wird die Voraussetzung erfüllt, dass nur ein gemeinsames Paar Pol und Polare vorhanden ist.

Substituirt man die einzige reelle Wurzel der Discriminante

$$\varrho : \sigma = b_{11} : a_{11}$$

in die Gleichungen

$$\varrho K_1 - \sigma K_2 = 0, \qquad \varrho \mathfrak{K}_1 - \sigma \mathfrak{K}_2 = 0,$$

so erhält man:

$$(a_{22} b_{11} - b_{22} a_{11}) x_2^2 + 2 (a_{23} b_{11} - b_{23} a_{11}) x_2 x_3 + (a_{33} b_{11} - b_{33} a_{11}) x_3^2 = 0,$$
$$(a_{22} b_{11} - b_{22} a_{11}) u_2^2 + 2 (a_{23} b_{11} - b_{23} a_{11}) u_2 u_3 + (a_{33} b_{11} - b_{33} a_{11}) u_3^2 = 0.$$

Die Discriminante beider Gleichungen ist kein vollständiges Quadrat. Als Function von a_{11} und b_{11} betrachtet, kann sie durch geeignete Wahl dieser Coefficienten einen negativen Werth erhalten.

Hieraus ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat:

Es giebt Büschel, die kein Paar Gerade, und Schaaren, die kein Paar Punkte enthalten.

7. Die Coordinaten der Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels

$$K \equiv \mu K_1 + \nu K_2 = 0$$

sind die Lösungen des Systems:

$$\mu (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) + \nu (b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3) - k g_1 = 0,$$
$$\mu (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) + \nu (b_{12} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3) - k g_2 = 0,$$
$$\mu (a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3) + \nu (b_{13} x_1 + b_{23} x_2 + b_{33} x_3) - k g_3 = 0,$$
$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = J.$$

Die ersten drei Gleichungen sind homogen linear für μ, ν, k; folglich annulliren die Lösungen $x_1\, x_2\, x_3$ die Determinante dieses Systems, erfüllen also die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, & b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3, & g_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, & b_{12} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3, & g_2 \\ a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3, & b_{13} x_1 + b_{23} x_2 + b_{33} x_3, & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ergiebt:

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels ist ein Kegelschnitt.

Bezieht man die Kegelschnitte des Büschels auf ein Dreieck, welches das gemeinsame Paar Pol und Polare als Ecke und Gegenseite enthält, so erhalten die Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ die oben angegebene einfachere Form; die Gleichung des Orts für die Mittelpunkte vereinfacht sich in Folge dessen zu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} x_1, & b_{11} x_1, & g_1 \\ a_{22} x_2 + a_{23} x_3, & b_{22} x_2 + b_{23} x_3, & g_2 \\ a_{23} x_3 + a_{33} x_3, & b_{23} x_2 + b_{33} x_3, & g_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe wird für $x_2 = x_3 = 0$ erfüllt und lehrt:

Der Ort der Mittelpunkte eines Büschels geht durch denjenigen Punkt, der für alle Kegelschnitte des Büschels ein und dieselbe Polare hat.

Haben die Kegelschnitte eines Büschels ein sich selbst conjugirtes Dreieck, so ist dasselbe dem Ort der Mittelpunkte eingeschrieben.

8. Der Mittelpunkt des Kegelschnitts einer Schaar:

$$\mathfrak{K} \equiv \mu \mathfrak{K}_1 + \nu \mathfrak{K}_2 = 0$$

hat die Gleichung:

$$\mu[(a_{11} + a_{12} + a_{13})u_1 + (a_{12} + a_{22} + a_{23})u_2 + (a_{13} + a_{23} + a_{33})u_3] + \nu[(b_{11} + b_{12} + b_{13})u_1 + (b_{12} + b_{22} + b_{23})u_2 + (b_{13} + b_{23} + b_{33})u_3] = 0.$$

Da nun:

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})u_1 + (a_{12} + a_{22} + a_{23})u_2 + (a_{13} + a_{23} + a_{33})u_3 = 0$$

die Gleichung des Mittelpunktes von $\mathfrak{K}_1$ ist, und

$$(b_{11} + b_{12} + b_{13})u_1 + (b_{12} + b_{22} + b_{23})u_2 + (b_{13} + b_{23} + b_{33})u_3 = 0$$

die Gleichung des Mittelpunktes von $\mathfrak{K}_2$, so folgt, dass der Mittelpunkt von $\mathfrak{K}$ mit den Mittelpunkten von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ auf einer Geraden liegt.

Diesem Satze kann man folgende allgemeinere Form geben:

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar ist eine Gerade.

9. **Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden jede Gerade im Allgemeinen in Punktepaaren zweier involutorisch verwandten Reihen.**

Die Kegelschnitte einer Schaar werden von jedem Punkte aus im Allgemeinen durch Geradenpaare zweier involutorischen Strahlenbüschel tangirt.

Man beziehe die Kegelschnitte des Büschels auf ein Dreieck, welches die betrachtete Secante als Seite $A_2 A_3$ enthält. Die Coordinaten der Schnittpunkte jedes Büschelkegelschnitts mit $A_2 A_3$ sind alsdann Wurzeln der Gleichung:

$$\mu(a_{12} x_2^2 + 2 a_{22} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2) + \nu(b_{12} x_2^2 + 2 b_{22} x_2 x_3 + b_{33} x_3^2) = 0.$$

Eliminirt man hieraus x_3 durch die Gleichung

$$g_2 x_2 + g_3 x_3 = \Delta,$$

so erhält man eine Gleichung für x_2 von der Form:

$$\mu(a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3) + \nu(b_1 x_2^2 + b_2 x_2 + b_3) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung bilden in der That die entsprechenden

Paare derjenigen beiden involutorischen Reihen, für welche die Wurzeln der beiden Gleichungen

$$a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3 = 0$$

und

$$b_1 x_2^2 + b_2 x_2 + b_3 = 0$$

entsprechende Punktepaare bestimmen.

Ebenso beweist man den auf Schaaren bezüglichen Theil des Satzes.

Man beziehe die Kegelschnitte der Schaar auf ein Dreieck, in welchem der betrachtete Punkt ein Eckpunkt A_1 ist.

Die Coordinaten der von A_1 an einen Kegelschnitt

$$\mu \mathfrak{K}_1 + \nu \mathfrak{K}_2 = 0$$

gelegten Tangenten sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\mu(a_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2) + \nu(b_{22}u_2^2 + 2b_{23}u_2u_3 + b_{33}u_3^2) = 0$$

und bilden demnach die entsprechenden Paare der beiden involutorischen auf A_1 liegenden Büschel, für welche die Wurzeln der Gleichungen

$$a_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0 \text{ und } g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 = \Delta,$$
$$b_{22}u_2^2 + 2b_{23}u_2u_3 + b_{33}u_3^2 = 0 \text{ und } g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 = \Delta$$

die Coordinaten entsprechender Paare sind.

10. Definition des Büschels und der Schaar von Oberflächen zweiter Ordnung.

Sind die Coefficienten der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punkt- oder in Plancoordinaten homogene lineare Functionen zweier (oder nicht homogene lineare einer) Variabeln μ und ν:

a) $$a_{ik} = a'_{ik}\mu + a''_{ik}\nu,$$

so heisst die Gesammtheit aller der Flächen, für deren jeden die Coefficienten durch ein reelles Verhältniss $\mu : \nu$ aus den Formeln a) hervorgehen, ein Büschel, wenn die Coefficienten den Gleichungen für Punktcoordinaten, eine Schaar, wenn dieselben den Gleichungen für Plancoordinaten zugehören.

Bezeichnet man die beiden Flächen zweiter Ordnung, deren Punktgleichungen die Coefficienten $a'_{ik}\, a''_{ik}$ enthalten, mit $K'\, K''$, sowie die, deren Plangleichungen dieselben Coefficienten enthalten, mit $\mathfrak{K}'\, \mathfrak{K}''$, so haben demnach die Gleichungen der Flächen eines Büschels und einer Schaar die allgemeine Form

b) $$K \equiv \mu K' + \nu K'' = 0,$$
$$\mathfrak{K} \equiv \mu \mathfrak{K}' + \nu \mathfrak{K}'' = 0.$$

Man sieht leicht, dass die Eigenschaft von Flächen zweiter Ordnung, ein Büschel oder eine Schaar zu bilden, vom Coordinatensystem unabhängig ist; ferner, dass man die Gleichung jeder einzelnen Fläche aus den Gleichungen von irgend zweien $K_1 K_2$ bez. $\mathfrak{K}_1 \mathfrak{K}_2$ mit Hülfe der Formeln ableiten kann:

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} K &\equiv \varrho K_1 + \sigma K_2 = 0, \\ \mathfrak{K} &\equiv \varrho \mathfrak{K}_1 + \sigma \mathfrak{K}_2 = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter, dass alle die Punkte, welche irgend zwei Flächen eines Büschels, und alle die Tangentialebenen, welche zwei Flächen einer Schaar gemeinsam sind, zugleich allen anderen Flächen des Gebildes angehören.

Oder: Schneiden sich zwei Flächen eines Büschels längs einer Curve und sonst nicht, so gehen alle Flächen durch diese Curve und haben sonst keine Punkte mit einander gemein.

Sind zwei Flächen einer Schaar einer developpablen Fläche eingeschrieben, und haben sonst keine gemeinsamen Ebenen, so sind alle Flächen der Schaar dieser Fläche eingeschrieben und haben sonst keine gemeinsamen Tangentialebenen.

Berühren sich zwei Flächen zweiter Ordnung in einem isolirten Punkte, so berühren sich alle Flächen des durch die beiden Flächen bestimmten Büschels, sowie alle der durch sie bestimmten Schaar in diesem Punkte.

Berühren sich zwei Flächen zweiter Ordnung in zwei isolirten Punkten, so können sie weiter keine Punkte als die Berührungspunkte, und weiter keine Ebenen als die Tangentialebenen in den Berührungspunkten mit einander gemein haben; alle Flächen des durch die beiden gegebenen Ebenen bestimmten Büschels und der durch sie bestimmten Schaar berühren sich dann ebenfalls in den beiden isolirten Punkten und es fällt demnach in diesem Falle das Büschel mit der Schaar zusammen.

Berühren sich zwei Flächen zweiter Ordnung längs eines Kegelschnitts, so haben sie weiter keinen Punkt als diesen Kegelschnitt, und weiter keine Tangentialebene als die Ebenen des Berührungskegels gemein; auch in diesem Falle ist das Büschel mit der Schaar identisch.

11. **Hat ein Punkt dieselbe Polarebene für irgend zwei Flächen zweiter Ordnung, so hat er diese Ebene zur Polaren in Bezug auf jede Fläche des durch die beiden Flächen bestimmten Büschels.**

Hat eine Ebene denselben Pol in Bezug auf irgend

zwei Flächen einer Schaar, so ist dieser Punkt der Pol der Ebene für alle Flächen der Schaar.

Denn sind die Gleichungen der beiden Flächen zweiter Ordnung, für welche der Punkt P_1 dieselbe Polarebene hat:

$$f' = 0 \quad \text{und} \quad f'' = 0,$$

und bezeichnet man $\partial f : \partial x_i$ für den Punkt P_1 mit f_i, so ist die Gleichung der Polarebene von P_1 in Bezug auf f' und f'':

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} f_1'x_1 + f_2'x_2 + f_3'x_3 + f_4'x_4 &= 0, \\ f_1''x_1 + f_2''x_2 + f_3''x_3 + f_4''x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese beiden Gleichungen dieselbe Ebene darstellen sollen, so können sie nur um einen constanten Factor abweichen; bezeichnen ϱ und σ zwei noch zu bestimmende Zahlen, so ist demnach:

$$\text{e)} \quad \begin{aligned} \varrho f_1' - \sigma f_1'' &= 0, \\ \varrho f_2' - \sigma f_2'' &= 0, \\ \varrho f_3' - \sigma f_3'' &= 0, \\ \varrho f_4' - \sigma f_4'' &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Polaren von P_1 in Bezug auf eine Fläche des Büschels

$$K \equiv \mu f' + \nu f'' = 0$$

ist:

$$(\mu f_1' + \nu f_1'')x_1 + (\mu f_2' + \nu f_2'')x_2 + (\mu f_3' + \nu f_3'')x_3 + (\mu f_4' + \nu f_4'')x_4 = 0.$$

Eliminirt man hier die Werthe f_i'' mit Hülfe der Gleichungen e), so stimmt die resultirende Gleichung mit der ersten von d) bis auf einen constanten Factor überein, stellt also in der That dieselbe Ebene dar.

Ferner seien die Gleichungen der Flächen in Plancoordinaten

$$f' = 0, \qquad f'' = 0,$$

die Ebene, die für beide ein und denselben Pol hat, habe die Coordinaten u_{k1}, so müssen, wenn $\partial f : \partial u_k$ für die Werthe u_{k1} mit f_k bezeichnet wird, die Gleichungen der Pole

$$\text{f)} \quad \begin{aligned} f_1'u_1 + f_2'u_2 + f_3'u_3 + f_4'u_4 &= 0, \\ f_1''u_1 + f_2''u_2 + f_3''u_3 + f_4''u_4 &= 0 \end{aligned}$$

denselben Punkt darstellen; hieraus ergiebt sich ein der Form nach mit e) identisches System, nur dass die f_i Differentialquotienten einer Function von Plancoordinaten sind.

Die Gleichung des Pols der Ebene u_k' für die Fläche der Schaar

$$\mathfrak{K} \equiv \mu f' + \nu f'' = 0$$

ist:

$$(\mu f_1' + \nu f_1'')u_1 + (\mu f_2' + \nu f_2'')u_2 + (\mu f_3' + \nu f_3'')u_3 + (\mu f_4' + \nu f_4'')u_4 = 0.$$

Dieselbe wird mit Hülfe der Gleichungen e) geometrisch identisch mit jeder der beiden gleichbedeutenden Gleichungen f).

12. **Bestimmung der Punkte, welche für die Flächen eines Büschels dieselbe Polarebene haben; sowie der Ebenen, welche für die Flächen einer Schaar denselben Pol haben.**

Damit ein Punkt ein und dieselbe Polarebene für alle Flächen eines Büschels hat, genügt, dass er sie in Bezug zweier Flächen des Büschels hat; und eine Ebene hat ein und denselben Punkt zum Pol für alle Flächen einer Schaar, wenn sie denselben für zwei Flächen der Schaar zum Pole hat.

Sind $f' = 0$, $f'' = 0$ irgend zwei Flächen des Büschels oder der Schaar, so müssen demnach die Coordinaten des gesuchten Punktes bez. der gesuchten Ebene das System e) erfüllen. Damit dasselbe erfüllbar ist, müssen für ϱ und σ solche Werthe genommen werden, infolge deren die Determinante dieses Systems verschwindet. Ist nun

$$\left.\begin{array}{l} f' = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{44}x_4^2 \\ f'' = b_{11}x_1^2 + \cdots + b_{44}x_4^2 \end{array}\right\} \text{ für Büschel,}$$

$$\left.\begin{array}{l} f' = c_{11}u_1^2 + \cdots + c_{44}u_4^2 \\ f'' = d_{11}u_1^2 + \cdots + d_{44}u_4^2 \end{array}\right\} \text{ für Schaaren,}$$

so ist demnach das Verhältniss $\varrho : \sigma$ an die Gleichung gebunden

für Punktcoordinaten:

$$\text{g)} \quad \begin{vmatrix} a_{11}\varrho - b_{11}\sigma, & a_{12}\varrho - b_{12}\sigma, & a_{13}\varrho - b_{13}\sigma, & a_{14}\varrho - b_{14}\sigma \\ a_{12}\varrho - b_{12}\sigma, & a_{22}\varrho - b_{22}\sigma, & a_{23}\varrho - b_{23}\sigma, & a_{24}\varrho - b_{24}\sigma \\ a_{13}\varrho - b_{13}\sigma, & a_{23}\varrho - b_{23}\sigma, & a_{33}\varrho - b_{33}\sigma, & a_{34}\varrho - b_{34}\sigma \\ a_{14}\varrho - b_{14}\sigma, & a_{24}\varrho - b_{24}\sigma, & a_{34}\varrho - b_{34}\sigma, & a_{44}\varrho - b_{44}\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

für Plancoordinaten:

$$\text{h)} \quad \begin{vmatrix} c_{11}\varrho - d_{11}\sigma, & c_{12}\varrho - d_{12}\sigma, & c_{13}\varrho - d_{13}\sigma, & c_{14}\varrho - d_{14}\sigma \\ c_{12}\varrho - d_{12}\sigma, & c_{22}\varrho - d_{22}\sigma, & c_{23}\varrho - d_{23}\sigma, & c_{24}\varrho - d_{24}\sigma \\ c_{13}\varrho - d_{13}\sigma, & c_{23}\varrho - d_{23}\sigma, & c_{33}\varrho - d_{33}\sigma, & c_{34}\varrho - d_{34}\sigma \\ c_{14}\varrho - d_{14}\sigma, & c_{24}\varrho - d_{24}\sigma, & c_{34}\varrho - d_{34}\sigma, & c_{44}\varrho - d_{44}\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

So viele reelle Wurzeln $\varrho : \sigma$ eine dieser beiden Gleichungen hat, so viele gemeinsame Paare von Pol und Polarebenen haben die beiden Flächen zweiter Ordnung.

Hieraus ergiebt sich:

Die beiden Gleichungen g) und h), die sich auf dieselben beiden Flächen beziehen, haben immer gleich viel reelle Wurzeln.

Zwei Flächen zweiter Ordnung haben kein gemeinsames Paar Pol und Polare, oder zwei gemeinsame Paare, oder vier gemeinsame Paare.

Man findet leicht durch geometrische Schlüsse:

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung zwei gemeinsame Paare Pol und Polare haben, so liegt der Pol der Ebene jedes Paares in der Ebene des andern Paares.

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung vier gemeinsame Paare Pol und Polare haben, so bilden die Pole die Ecken, die Polaren die Seiten eines für alle Flächen des Büschels oder der Schaar sich selbst conjugirten Tetraeders.

13. **Bestimmung der einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung zugehörigen Kegel, und der einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung zugehörigen Grenzflächen.**

Giebt man den Flächen des Büschels und der Schaar die Form:

$$K \equiv \varrho f' - \sigma f'' = 0,$$
$$\mathfrak{K} \equiv \varrho f' - \sigma f'' = 0,$$

so liefert die erste Gleichung einen Kegel und die zweite eine Grenzfläche zweiter Ordnung, wenn die Discriminante der Gleichung verschwindet.

Diese Bedingungen für das Verhältniss $\varrho : \sigma$ sind identisch mit den Gleichungen g) und h) in voriger Nummer. Man schliesst hieraus:

Ein Büschel enthält höchstens so viel Kegel, und eine Schaar höchstens so viele Grenzflächen, als gemeinsame Paare von Pol und Polaren vorhanden sind.

Es können aber auch weniger Kegel oder Grenzflächen existiren, sobald für reelle Wurzeln $\varrho : \sigma$ der Gleichungen g) oder h) die Flächen

$$\varrho f' - \sigma f'' = 0$$

keine reellen Punkte oder Ebenen enthalten.

Ist $\varrho : \sigma$ eine reelle Wurzel von g), also

$$\varrho f' - \sigma f'' = 0$$

die Gleichung eines dem Büschel $f' f''$ angehörigen Kegels, so erfüllen die Coordinaten der Kegelspitze das System von Gleichungen:

$$\varrho f_1' - \sigma f_1'' = 0,$$
$$\varrho f_2' - \sigma f_2'' = 0,$$
$$\varrho f_3' - \sigma f_3'' = 0,$$
$$\varrho f_4' - \sigma f_4'' = 0.$$

Ist $\varrho : \sigma$ eine reelle Wurzel von h), also

$$\varrho f' - \sigma f'' = 0$$

eine Grenzfläche der Schaar $f' f''$, so erfüllen die Coordinaten der Hauptebene ein ebenso gestaltetes System:

$$\varrho f_i' - \sigma f_i'' = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Beide Systeme sind identisch mit den beiden Systemen e) der vorigen Nummer (worin $f' f''$ ebenfalls sowohl als Gleichungen in Punktcoordinaten als in Plancoordinaten zu substituiren sind). Diese Wahrnehmung ergiebt:

Die Spitzen der einem Büschel zugehörigen Kegel sind Punkte, die für alle Flächen des Büschels dieselbe Polarebene haben.

Die Hauptebenen der einer Schaar zugehörigen Grenzflächen sind Ebenen, die für alle Flächen der Schaar denselben Pol haben.

In Rücksicht auf die gegebenen Entwicklungen beweist man leicht die folgenden Sätze:

14. Die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung werden von jeder Geraden in Paaren von entsprechenden Punkten zweier involutorischen Reihen durchdrungen.

Die Flächen einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung werden von jeder Geraden als Axe aus durch Paare entsprechender Ebenen zweier involutorischen Ebenenbüschel tangirt.

Zum Beweise lege man das Axentetraeder so, dass es die fragliche Schnittgerade oder Büschelaxen als Seite enthält; man kommt dann auf den an letzter Stelle entwickelten Satz über involutorische Punktreihen und Geraden- oder Ebenenbüschel zurück.

15. Die Mittelpunkte der Flächen eines Büschels liegen auf dem Durchschnitt zweier bestimmten Flächen zweiter Ordnung; derselbe enthält die Spitzen der im Büschel enthaltenen Kegel.

Die Mittelpunkte der Flächen einer Schaar liegen auf einer Geraden.

16. Die Polaren eines gegebenen Punktes P in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen Punkt (Q). Diese

beiden Punkte haben reciproke Bedeutung: die Polaren von Q in Bezug auf alle Büschelkegelschnitte gehen durch P.

Die Polarebenen eines gegebenen Punktes P in Bezug auf die Flächen eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung gehen durch eine Gerade.

Die Pole einer Geraden T in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar sind in einer Geraden enthalten (U). Die Bedeutung von T und U ist reciprok.

Die Pole einer Ebene T in Bezug auf die Flächen einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung liegen auf einer Geraden.

Ist das Büschel, oder die Curvenschaar, oder das Flächenbüschel, oder die Flächenschaar durch zwei in ihr enthaltene Gebilde zweiter Ordnung bestimmt:

$$f' = 0, \qquad f'' = 0;$$

sind ferner die Gleichungen der Polaren von P, oder des Poles von T in Bezug auf f' und f'':

$$\varphi' = 0, \qquad \varphi'' = 0;$$

so hat der Pol von P bez. die Polare von T in Bezug auf das Individuum des Büschels oder der Schaar

$$K \equiv \mu f' + \nu f'' = 0, \text{ oder } \mathfrak{K} = \mu f' + \nu f'' = 0$$

die Gleichung:

$$\mu \varphi' + \nu \varphi'' = 0.$$

17. Man bilde das System von Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungscoefficienten für Punktcoordinaten bez. Plancoordinaten homogene lineare Functionen dreier Variabeln sind, und zwar so, dass die Coefficienten der Gleichung einer individuellen Fläche des Systems durch bestimmte reelle Werthe der Variabeln λ, μ, ν aus den Formeln

$$a_{ik} = a'_{ik} \lambda + a''_{ik} \mu + a'''_{ik} \nu$$

hervorgehen: So liegen die Mittelpunkte dieser Flächen für Punktcoordinaten auf einer Fläche zweiter Ordnung, für Plancoordinaten auf einer Ebene.

Die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf die Flächen dieses Systems in Punktcoordinaten gehen durch einen Punkt (Q); P und Q sind reciprok.

Die Pole einer Ebene T in Bezug auf die Flächen dieses Systems in Plancoordinaten liegen auf einer Ebene (U); T und U sind reciprok.

Druckfehlerverzeichniss.

Seite 61, Zeile 8 von oben lies „(25)“ und „(28)“ statt „(17)“ und „(19)“.
„ 80, „ 12 von oben lies „$v_1 < v_2 < v_3$“ statt „$v_1 > v_2 > v_3$“.
„ 82, „ 8 und 10 von unten vertausche „gerade“ u. „ungerade“.
„ 83, „ 3 und 8 von oben vertausche „Hyperbel“ und „Ellipse“.
„ 93, „ 1 von unten lies „$\frac{r\lambda''}{r_2}$“ statt „$\frac{\lambda''}{r_2}$“.
„ 94, „ 1 von oben lies „$r u_1$“ und „$\frac{r\lambda'}{r_1}$“ statt „$r_1 u_1''$“ und „$\frac{\lambda'}{r_1}$“.
„ 107, „ 20 von oben lies „Fläche“ statt „Curve“.
„ 132, „ 5 von unten lies „$\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2$“ statt „$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$“.
„ 191, „ 5 von unten lies „$= -$“ statt „$=$“.
„ 192, „ 1 und 2 von unten lies „$- 2$“ statt „$+ 2$“.
„ 195, „ 20 und 21 von oben lies „$\frac{n s_6}{r_6} : \frac{m s_5}{r_5}$“ und „$\frac{n t_6}{r_6'} : \frac{m t_5}{r_5'}$“ statt der reciproken Werthe.

Ferner bittet der Verfasser, einige Verwechselungen in den Seitenüberschriften zu verbessern.

Hecht, Heinrich, Curventafeln zum Traçiren von Eisenbahne Chausseen etc. mit erläuterndem Texte und Figuren. Für Ingenieure, Geomete Baumeister, Bauunternehmer und Techniker überhaupt. gr. 8. Fein Velinpa geh. Preis 12 Sg

Moll, C. L. und **F. Reuleaux,** Die Festigkeit der Materialien namentlich des Guss- und Schmiedeeisens. Zunächst für Ingenieure und polytech nische Schulen. Besonderer Abdruck aus der „Constructionslehre für de Maschinenbau". Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fei Velinpap. geh. Preis 15 Sgr

Müller, Prof. Dr. Joh., Die constructive Zeichnungslehre ode die Lehre vom Grund- und Aufriss, der Parallelperspective, der malerischen Per spective und der Schattenconstruction, für technische Lehranstalten und für de Selbstunterricht. 4. Fein Velinpap. geh.

Erster Theil. Text. Preis 20 Sgr
Atlas (35 Kupfertafeln). Preis 2 Thlr
Zweiter Theil. Text. Preis 20 Sgr
Atlas (37 Kupfertafeln). Preis 2 Thlr

Reuleaux, Prof. F., Constructionslehre für den Maschinenbau Royal-Octav. Fein Velinpap. geh. Erster Band: Construction der Maschinen theile. Mit einem Atlas von 31 Tafeln in Imperial-Format und 161 in den Tex eingedruckten Holzstichen. Preis 12 Thlr. 20 Sgr

Reuleaux, Prof. F., Ueber den Maschinenbaustyl. Ein Beitrag zur Begründung einer Formenlehre für den Maschinenbau. Mit 83 in den Tex eingedruckten Holzstichen. (Besonderer Abdruck aus der „Constructionslehre fü den Maschinenbau" von demselben Verfasser.) gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 16 Sgr

Reuleaux, Prof. F., Kurzgefasste Geschichte der Dampfmaschine Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Preis 5 Sgr.

Reuleaux, Prof. F., Der Constructeur. Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen-Entwerfen. Für Maschinen- und Bau-Ingenieure, Fabrikanten und technische Lehranstalten. Dritte sorgsam durchgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. Royal-Octav. Fein Velinpap. geh. Preis 4 Thlr. 24 Sgr.

Rosengarten, A., Das Buch von den architektonischen Stylarten. Eine kurze allgemeinfassliche Darstellung der charakteristischen Verschiedenheiten der architektonischen Stylarten zur richtigen Verwendung in Kunst und Handwerk. Für Architekten, Maler, Bauschulen und Baugewerkschulen, Handwerker im Allgemeinen und Bauhandwerker im Besonderen und für gebildete Freunde der Kunst und Architektur. Mit 638 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Preis 4 Thlr. In engl. Leinen cartonnirt 4 Thlr. 10 Sgr.

Scheffler, Dr. Hermann, Ueber Gitter- und Bogenträger und über die Festigkeit der Gefässwände, insbesondere über die Ursachen der Explosionen. Zwei Monographien zur Erweiterung der Biegungs- und Festigkeitstheorie. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 15 Sgr

Scheffler, Dr. Hermann, Die Prinzipien der kalorischen Maschine von Erikson. 8. geh. Preis 5 Sgr

Scheffler, Dr. Hermann, Die Wirkung zwischen Schiene und Rad. Eine Vorlage für die Versammlung der deutschen Eisenbahntechniker im Jahre 1868. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen und zwei Tafeln. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 15 Sgr

Scheffler, Adolph, Ueber eine rationelle Form der Eisenbahnwagenachsen und die technischen Vorzüge der Gussstahlachsen. Mit einer lithographirten Tafel. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 8 Sgr.

Schellen, Dr. H., Die Schule der Elementar-Mechanik und Maschinenlehre für den Selbstunterricht angehender Techniker, Mechaniker, Industrieller, Landwirthe, Bergmänner, Architekten, Bauhandwerker, Werkführer, Mühlen- und Fabrikbesitzer, sowie für Gewerbe- und Realschulen. Zum Theil nach Delaunay's Cours élémentaire de Mécanique frei bearbeitet. Mit 837 in den Text eingedruckten Holzstichen. 8. Fein Velinpap. geh. Zwei Bände. Dritte verbesserte Auflage. Preis 3 Thlr.

Schellen, Dr. H., Der elektromagnetische Telegraph in den Hauptstadien seiner Entwickelung und in seiner gegenwärtigen Ausbildung und Anwendung nebst einem Anhange über den Betrieb der elektrischen Uhren. Ein Handbuch der theoretischen und praktischen Telegraphie für Telegraphenbeamte, Physiker und das gebildete Publikum. Mit 487 in den Text eingedruckten Holzstichen. Fünfte gänzlich umgearbeitete und bedeutend erweiterte, den neuesten Zuständen des Telegraphenwesens angepasste Auflage. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Complet in vier Lieferungen. Preis 4 Thlr. 20 Sgr.

Scholl, E. F., Der Führer des Maschinisten. Ein Hand- und Hülfsbuch für Heizer, Dampfmaschinenwärter, Mechaniker, Ingenieure, Fabrikherren, Maschinenbauanstalten, technische Behörden u. Gewerbeschulen. Siebente verbesserte und vermehrte, unter Mitwirkung von F. Reuleaux herausgegebene Auflage. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. 8. Fein Velinpap. Cart. Preis 1 Thlr. 25 Sgr.

——, Dasselbe Werk gebunden. Preis 2 Thlr. $2\frac{1}{2}$ Sgr.

Semper, Gottfried, Die vier Elemente der Baukunst. Ein Beitrag zur vergleichenden Baukunde. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 20 Sgr.

Semper, Gottfried, Das Königliche Hoftheater zu Dresden. Mit 12 Kupfertafeln. gr. Fol. geh. Preis 6 Thlr. 20 Sgr.

Voit, A. von, Das chemische Laboratorium der königlichen Akademie der Wissenschaften in München. Unter Mitwirkung von Justus v. Liebig. Nebst einem Atlas mit 13 Tafeln in Quer-Folio. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 5 Thlr.

Weisbach, Prof. Dr. J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis für den Unterricht an technischen Lehranstalten sowie zum Gebrauch für Techniker bearbeitet. In drei Theilen. Jeder Theil mit etwa 800 bis 1000 in den Text eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Fein Velinpap. geh.

Erster Theil: Theoretische Mechanik. Fünfte Auflage. Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen. Erste bis vierte Lieferung. Preis à 15 Sgr.

Zweiter Theil: Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen. Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage. Vollständig in 12 Lieferungen. Preis complet 6 Thlr.

Dritter Theil: Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. Zweite Auflage. Mit gegen 1000 in den Text eingedruckten Holzstichen. Erste und zweite Lieferung. Preis à 15 Sgr.

Weisbach, Prof. Dr. J., Der Ingenieur, Sammlung von Tafeln, Formeln und Regeln der Arithmetik, der theoretischen und praktischen Geometrie sowie der Mechanik und des Ingenieurwesens. Für praktische Geometer, Mechaniker, Architekten, Civilingenieure, Berg- und Hüttenbeamte, Baugewerksmeister und andere Techniker bearbeitet. Fünfte verbesserte Auflage. Mit 491 in den Text eingedruckten Holzstichen. Taschenformat. Preis 2 Thlr. 4 Sgr.

In engl. Leinen gebunden. Preis 2 Thlr. 16 Sgr.

Wernicke, Ad., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung, mit Uebungen und Anwendungen auf Maschinen- und Bau-Constructionen. Für den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Privatstudium. Für

angehende Ingenieure und Architekten bearbeitet. gr. 8. Satin. Velinpap. gel
In zwei Theilen.

Erster Theil: Mechanik fester Körper. Zweite Auflage. Mit 405 in den Te
eingedruckten Holzstichen. Preis 2 Thl

Zweiter Theil: Mechanik flüssiger Körper. Mit 170 in den Text eingedruckte
Holzstichen. Preis 1 Thlr. 10 Sg

Zernikow, Dr., Die Theorie der Dampfmaschinen, in welcher di
physikalischen Eigenschaften und die mechanischen Wirkungen des Dampfes vo
der ersten Ursache der Dampfbildung, von der Wärme, abhängig gemacht wei
den. gr. 8. Fein Velinpap. geh. Preis 1 Thlr. 10 Sg